Für große x, y ergibt sich

$$2\pi \psi_n(x)\,\psi_n(y)^* \sim e^{-k_n(x+y)} \oint_{k_n} S(\varrho)\, d\varrho\,, \quad (14)$$

woraus der Normierungsfaktor im diskreten Spektrum entnommen werden kann.

3. Ergänzende Bemerkungen. Im dreidimensionalen Fall läßt sich die Darstellung (10a) der Greenschen Funktion unter Berücksichtigung einer eventuellen Entartung der Eigenwerte unmittelbar übernehmen. Die (9) entsprechende Darstellung läßt sich zwar allgemein nicht explizit angeben, doch ist es hier möglich, und das genügt für unsere Zwecke, eine solche Darstellung zu finden, wenn der Quellpunkt Q sich in großer Entfernung befindet. Ist überdies der Aufpunkt P weit vom Streuzentrum entfernt, jedoch so, daß noch $r_P \ll r_Q$ bleibt, so lautet sie

$$G(k; P, Q) \sim \quad (15)$$
$$\frac{e^{ikr_Q}}{-4\pi r_Q} \cdot \left[e^{-ikz_P} + S(k; \vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr_P}}{r_P} \right],$$

r_P, ϑ, φ sind Polarkoordinaten des Aufpunktes P; r_Q = Entfernung des Quellpunktes vom Koordinatenanfangspunkt. Der Quellpunkt ist auf der positiven z-Achse angenommen.

Der Klammerfaktor in (15) ist eine Überlagerung einer vom Quellpunkt ausgehenden ebenen Welle und einer vom Streuzentrum gestreuten Kugelwelle. Letztere läßt sich in Partialwellen zerlegen

$$S(k; \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} S_{lm}(k)\, P_l^m(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}. \quad (16)$$

Die Greensche Funktion löst also das Streuproblem für eine aus einem Quellpunkt Q kommende Teilchenwelle an einem Streufeld. Die gestreute Intensität im Vergleich zur einfallenden wird für entfernte Q durch $|S(k; \vartheta, \varphi)|^2 \cdot r_P^{-2}$ gegeben. Darüber hinaus enthält die Greensche Funktion unter den Unendlichkeitsstellen der Funktion S oder der Koeffizienten S_{lm}, als analytische Funktionen von k betrachtet, die Eigenwerte des diskreten Spektrums. Es gelten analoge Beziehungen zu (12), (13), (14).

Damit enthält die Greensche Funktion bei großer Entfernung von P und Q vom Streuzentrum (mit $r_P \ll r_Q$) dieselben Informationen wie die Streufunktion $S(k; \vartheta, \varphi)$ bezw. wie die Koeffizienten $S_{lm}(k)$ und ist ihr damit gleichwertig.

Im Falle des Coulomb-Potentiales ist das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen etwas anders als in (2) bzw. in (15) angegeben, doch lassen sich die obigen Überlegungen für diesen Fall leicht modifizieren. Im übrigen können hier die Aussagen (12), (13), (14) direkt nachgeprüft werden. Das wurde in [2,3] für die Schrödinger- und für die Dirac-Gleichung durchgeführt.

Verwickelter sind die Verhältnisse bei Mehrteilchenproblemen, insbesondere hinsichtlich der anschaulichen Deutung des Zusammenhanges der Greenschen Funktion mit dem allgemeinen Stoßproblem. Hierauf kann vielleicht später eingegangen werden.

Hrn. Prof. A. Sommerfeld und Hrn. Prof. W. Heisenberg danke ich für ihr Interesse an dieser Untersuchung, Hrn. Dr. Res Jost (Zürich) dafür, daß er mir seine Arbeit vor ihrer Veröffentlichung zugänglich machte.

Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen II
Mehrfach- und Vielfachstreuung [1]

Von Gert Molière

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen

(Z. Naturforschg. 3a, 78—97 [1948]; eingegangen am 8. Oktober 1947)

Die Theorie der inkohärenten Mehrfach- und Vielfachstreuung zu (absolut) kleinen Winkeln wird neu entwickelt. Gegenüber den bisherigen Theorien, auf deren Methoden z. Tl. aufgebaut wird, werden folgende Fortschritte erzielt:

1. Es wird das in Tl. I abgeleitete, für beliebige Werte von $\alpha = zZ/(137\beta)$ gültige Einzelstreugesetz zugrunde gelegt.

[1] Habilitationsschrift Tübingen 1947.

2. Bei Streuung an dünneren Schichten („Mehrfachstreuung") muß das in Form einer Integraldarstellung („allgemeines Fehlergesetz" nach W. Bothe) erhaltene Ergebnis numerisch ausgewertet werden. Einfache Methoden hierzu werden angegeben. Danach ist es auch möglich, rückwärts aus der experimentell gefundenen Streuwinkelverteilung das Einzelstreugesetz zu ermitteln. (Spezielle Durchführung im folgenden Tl. III.)

3. Bei größerer Schichtdicke („Vielfachstreuung") ist eine Reihenentwicklung möglich, die die Streuwinkelverteilung im *ganzen* Winkelbereich (einschließlich des Überganges von der eigentlichen „Vielfachstreuung" bei relativ kleinen Winkeln zum „Einfachstreuungs-Schwanz" bei relativ großen Winkeln) beschreibt, und zwar:

$$f(\Theta)\,\Theta\,d\Theta = [2\,e^{-\vartheta^2} + f^{(1)}(\vartheta)/B + f^{(2)}(\vartheta)/B^2]\,\vartheta\,d\vartheta \tag{I a}$$

für den „räumlichen Streuwinkel" (vgl. Anm. 14, S. 88) Θ innerhalb $d\Theta$ (bezw. — mit $d\omega/2\pi$ statt $\Theta\,d\Theta$ — für Streuung in ein Raumwinkelelement $d\omega$ bei Θ) und

$$f(\Phi)\,d\Phi = [(2/\sqrt{\pi})\,e^{-\varphi^2} + f^{(1)}(\varphi)/B + f^{(2)}(\varphi)/B^2]\,d\varphi \tag{I b}$$

für den „projizierten Streuwinkel Φ innerhalb $d\Phi$. Die dabei auftretenden Funktionen sind auf S. 89 tabuliert, und es ist zur Abkürzung:

$$\vartheta = \Theta/(\chi_c\sqrt{B}) \quad \text{und} \quad \varphi = \Phi/(\chi_c\sqrt{B}) \tag{II}$$

gesetzt mit Benutzung der Winkelkonstanten:

$$\chi_c = (22{,}9\,z\,Z/p\,c\,\beta)\cdot\sqrt{\sigma/A}\ [\text{Grad}] \tag{III}$$

[σ = Flächendichte in g/cm² als Maß der Schichtdicke, A = Atomgewicht; vgl. auch die Zeichenerklärung in § 1. — Die Zahlenkonstante in (III) gilt für pc in MeV; wird $H\varrho$ in Gauß·cm als Maß von pc/z benutzt, so ist 76400 statt 22,9 einzusetzen.] Die Größe B in (I a, b) und (II) kann mit Hilfe der Tab. 1, S. 88, als Funktion der Größe:

$$\log_{10}\Omega_b = 8{,}215 + \log_{10}[Z^{-2/3}(\sigma/A)\,a^2/(1{,}13 + 3{,}76\,\alpha^2)] \tag{IV}$$

ermittelt werden. Ω_b ist dabei ein Maß für die mittlere Anzahl von Einzelstreuprozessen in der Schicht; Vielfachstreuung liegt vor bei $\Omega_b \gtrsim 20$ bzw. $B \gtrsim 4{,}5$. — Aus (I a, b) folgende Formeln für Mittelwerte der Streuwinkel siehe in § 10.

4. Der durch Ionisation verursachte Energieverlust der Teilchen in der Schicht kann nötigenfalls streng berücksichtigt werden, wobei die Formeln (I a, b) und (II) unverändert erhalten bleiben und nur (III) und (IV) in einfacher Weise zu verallgemeinern sind: vgl. hierzu § 6 und insbes. Gl. (6,13 a u. b). Dort sind auch die entsprechenden Verallgemeinerungen für den Fall der Zusammensetzung der streuenden Schicht aus mehreren Stoffkomponenten angegeben [Formeln (6, 9′) und (6, 10′)].

5. Nach (I a u. b) gilt asymptotisch bei (relativ) großen Streuwinkeln:

$$f(\Theta)\,\Theta\,d\Theta = (2\,\chi_c^2/\Theta^4)\,\Theta\,d\Theta\,|1 + (4\,\chi_c^2/\Theta^2)\,[\log_e(\Omega_b\,\Theta^2/\chi_c^2) - 2]| \tag{V a}$$

und

$$f(\Phi)\,d\Phi = (\chi_c^2/\Phi^3)\,d\Phi\,|1 + (3\,\chi_c/\Phi^2)\,[\log_e(\Omega_b\,\Phi^2/\chi_c^2) - 1{,}780]| \tag{V b}$$

mit χ_c nach (III) und Ω_b nach (IV). Das Zusatzglied neben der Eins in der geschweiften Klammer in (V a) (für den räumlichen) bzw. (V b) (für den projizierten Streuwinkel) beschreibt die Abweichung erster Ordnung vom Rutherfordschen Einfachstreuungs-Gesetz und gilt für beliebige Werte von Ω_b (insbesondere also auch, wenn die Streuung zu den relativ kleinen Winkeln nur mehrfach ist). Die Formeln (V a, b) sind daher geeignet, das (noch auf vor-quantenmechanischer Grundlage beruhende) Wentzelsche Kriterium für Einfachstreuung zu ersetzen. — Weitergehende, in den Gliedern höherer Ordnung aber nur für Vielfachstreuung ($\Omega_b \gtrsim 20$) gültige asymptotische Formeln siehe in § 9.

6. Es wird angegeben, wie der Einfluß der Gitterstruktur (z. B. bei Streuung an feinkristallinen Metallfolien) zu berücksichtigen ist. Die Diskussion dieses Einflusses für spezielle Fälle soll in einem folgenden Tl. III erfolgen.

Mit den Ergebnissen der I. Mitteilung[2] über den Einfluß der Abschirmung des Coulomb-Feldes auf die Verteilung der Einzel-Streuwinkel χ besitzen wir die notwendige Grundlage zur Behandlung des statistischen Problems der inkohärenten Mehrfach- und Vielfachstreuung, das darin besteht, die Verteilung der resultierenden Streuwinkel Θ zu bestimmen, die schnelle geladene Teilchen beim Durchdringen einer materiellen Schicht (z. B. einer Metallfolie) infolge des Auftretens mehrerer bzw. vieler Einzelstreuprozesse an den Atomen der Schicht erhalten. (Um *inkohärente* Streuung handelt es sich dabei insofern, als die verschiedenen aufeinanderfolgenden Streuprozesse als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Dies schließt jedoch nicht aus, daß für jeden einzelnen dieser Streuprozesse Interferenzeinflüsse durchaus wesentlich sein können.) Es ist üblich, bezüglich der (relativen) Größe der resultierenden Streuwinkel Θ zwischen verschiedenen Bereichen zu unterscheiden, die als Mehrfach- bzw. Vielfach- und als Einfachstreuungs-Bereich bezeichnet werden. Wegen des verhältnismäßig häufigen Auftretens der *kleinen* Einzel-Ablenkungen χ kommen nämlich die relativ kleinsten Streuwinkel Θ wesentlich durch vielfache (bei größerer Schichtdicke) bzw. mehrfache (bei geringerer Schichtdicke) Streuung zustande; demgegenüber beruhen die relativ großen Streuwinkel Θ *wesentlich* auf dem Auftreten einer einzigen großen Einzel-Ablenkung (neben mehreren bzw. vielen kleinen, die hier praktisch ohne Einfluß sind). Abweichend von diesem Sprachgebrauch werden wir gelegentlich auch (in einem erweiterten Sinne, ohne Bezug auf den Winkelbereich) von dem Vorliegen von Mehrfach- bzw. Vielfachstreuung reden, wenn die Streuung zu den kleinsten Winkeln (in dem genannten engeren Sinne) mehrfach bzw. vielfach ist.

Bei der im folgenden durchgeführten Theorie wird vorausgesetzt, daß der gesamte Bereich der praktisch in Betracht kommenden Streuwinkel Θ (absolut) klein (etwa $\lesssim 20°$) ist. Im wesentlichen die gleiche Voraussetzung liegt bereits den älteren Theorien von G. Wentzel[3] und W. Bothe („allgemeines Fehlergesetz")[4] sowie den neueren (speziell die Vielfachstreuung betreffenden) Theorien von E. J. Williams[5] und Goudsmit und Saunderson[6] zugrunde. Die Theorie von Wentzel reicht insofern weiter, als sie in den allgemeinen Formeln die durch Streuung verursachte Wegverlängerung in der Schicht berücksichtigt. Bei der numerischen Auswertung, die übrigens nur für Mehrfachstreuung durchführbar ist, kann jedoch dieser Vorteil praktisch nicht ausgenutzt werden. — Die Theorie von Goudsmit und Saunderson geht scheinbar über die genannte Voraussetzung hinaus, insofern sie eine für alle Winkel gültige Entwicklung nach Kugelfunktionen benutzt. Dieser Vorteil wird jedoch dadurch wieder hinfällig, daß sich die Theorie auf gleiche in der Schicht zurückgelegte Wegstrecken der gestreuten Teilchen bezieht; die von den Verfassern angegebene „Korrektur erster Ordnung" zur Berücksichtigung der Wegverlängerung ist nicht nur unzureichend, sondern auch unrichtig; vgl. hierzu § 5, Schluß.

Methodisch schließt sich die vorliegende Arbeit an die genannten älteren Theorien von Wentzel und Bothe an und besitzt außerdem — bei der speziellen Ausgestaltung für Vielfachstreuung — methodische Zusammenhänge mit der Theorie von Goudsmit und Saunderson. Durch konsequente Ausnutzung der durch die Beschränkung auf kleine Winkel möglichen Vereinfachungen sowie durch Anwendung der Fourier-Methode wird speziell für Vielfachstreuung eine bequeme, rasch konvergierende (genauer: semi-konvergente) Funktionsentwicklung erhalten, die die Benutzung der (nach Umfang und Genauigkeit notwendig beschränkten) numerischen Tabellen von Goudsmit und Saunderson überflüssig macht, und gegenüber der Theorie von Williams den Vorteil besitzt, daß sie auch den Übergangsbereich zwischen Einfachstreuungs-Schwanz und Vielfachstreuungs-Bereich sowie für den letzteren zugleich die Abweichung von der Gauß-Funktionsgestalt beschreibt. Zugleich liefert das asymptotische Verhalten der berechneten Streuwinkel-Verteilungsfunktionen ein (auch bei Vorliegen von Mehrfachstreuung im weiteren Sinne gültiges) Kriterium für Einfachstreuung. Für den Fall von Mehrfachstreuung werden Methoden angegeben, die auch rückwärts von der gemessenen

[2] G. Molière, Z. Naturforschg. **2a**, 133 [1947]; zitiert als I.
[3] G. Wentzel, Ann. Physik **69**, 335 [1922].
[4] W. Bothe, Z. Physik **4**, 161 u. 300 [1921]; **5**, 63 [1921].
[5] E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. [London] **169**, 531 [1939], und frühere Arbeiten; Physic. Rev. **58**, 292 [1940].
[6] Goudsmit u. Saunderson, Physic. Rev. **57**, 24, 552 [1940]; ebenda **58** [1940].

Streuwinkelverteilung auf die Gestalt des Einzelstreugesetzes zu schließen gestatten*. Ein weiterer Fortschritt gegenüber den genannten Theorien besteht darin, daß der auf Ionisation in der Schicht beruhende Energieverlust der Teilchen durch eine einfache Verallgemeinerung nötigenfalls streng berücksichtigt werden kann. Ergänzend erwähnen wir hier noch die Theorien der „vollständigen Diffusion" von W. Bothe[7] und von Bethe, Rose und Smith[8], die auf Grund der Annahme reiner Vielfachstreuung (d. h. ohne Berücksichtigung der endlichen Größe der Einzelstreuwirkung) die Streuung bis zu großen Winkeln (einschließlich Rückwärtsstreuung) behandeln; in der letztgenannten Theorie wird (als einziger der bisherigen) der Einfluß des Energieverlustes mitberücksichtigt.

In § 12 werden die Ergebnisse verschiedener Experimente über Vielfachstreuung mit der Theorie verglichen. Es zeigt sich dabei, daß die experimentellen Werte sehr stark streuen (vgl. insbes. Abb. 3). Wie weit diese Streuung auf experimentellen Ungenauigkeiten (Energiebestimmung in der Nebelkammer!) und wie weit sie auf den bei dem Vergleich noch nicht berücksichtigten Einflüssen der Gitterstruktur bzw. des Energieverlustes beruht, bleibt vorerst noch ungeklärt. — Es ist beabsichtigt, in einer folgenden III. Mitteilung die Anwendung der Theorie auf spezielle Fälle von Mehrfachstreuung zu diskutieren. Dort sollen auch die Einflüsse der Gitterstruktur und des Energieverlustes näher untersucht werden.

§ 1. Grundlagen

Im folgenden bedeuten:

l die Länge des in der Schicht zurückgelegten Weges, d. h. (bei senkrechtem Einfall) die Schichtdicke;

N die Anzahl der streuenden Atome im cm³;
Z deren Ordnungszahl;
$\pm ze$ = Ladung der gestreuten Teilchen;
$v = \beta c$ deren Geschwindigkeit;
$p = \hbar k_0 = mv/\sqrt{1-\beta^2}$ deren Impuls;
$\varkappa = zZe^2/\hbar v = zZ/(137\beta)$ den bereits in I benutzten Parameter.

Vom Energieverlust der Teilchen auf ihrem Wege durch die Schicht sehen wir zunächst ganz ab; die zur Berücksichtigung des auf Ionisation beruhenden Energieverlustes notwendige Verallgemeinerung werden wir im § 6 nachholen. — Es sei nun

$$W(\chi)\,\chi\,d\chi = N\,l\,Q(\chi)\,2\pi\chi\,d\chi = \frac{2\chi_c^2\,q(\chi)}{\chi^4}\,\chi\,d\chi \qquad (1,1)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen auf seinem Wege durch die Schicht eine Einzelablenkung zwischen χ und $\chi + d\chi$ erfährt (unabhängig davon, ob zugleich auch Ablenkungen in andere Winkelbereiche erfolgen oder nicht). Dabei ist zur Abkürzung die charakteristische Winkelkonstante

$$\chi_c = \frac{\varkappa}{k_0}\sqrt{4\pi N l} = \frac{zZe^2}{pv}\sqrt{4\pi N l} \qquad (1,2)$$

eingeführt, und der Einfluß der Abschirmung wird durch das Verhältnis $q(\chi) = Q(\chi)/Q_{\text{Ruth.}}(\chi)$ (vgl. I) des (auf die Raumwinkeleinheit bezogenen) Streuquerschnitts $Q(\chi)$ zum Rutherfordschen Streuquerschnitt berücksichtigt, wobei für den letzteren die für kleine χ gültige Näherungsform $Q_{\text{Ruth.}}(\chi) = (2\varkappa/k_0)^2 \cdot \chi^{-4}$ eingesetzt ist. Wegen der Kleinheit der Winkel dürfen wir dabei die Einheitskugel durch ihre Tangentialebene im Nullpunkt ersetzt denken, so daß χ in (1,1) als Radiusvektor in dieser Ebene aufgefaßt werden kann. Im folgenden wird es gelegentlich notwendig sein, die Einzelstreuwinkel nicht nur nach ihrer Größe, sondern zugleich auch nach ihrer Richtung (d. h. ihrem Azimut) zu charakterisieren, was am einfachsten durch Einführung zweidimensionaler Vektoren $\vec{\chi}$ in der soeben erwähnten Ebene geschehen kann. In dieser vektoriellen Schreibweise tritt an die Stelle von (1,1):

$$W(\vec{\chi})\,\frac{d\sigma_\chi}{2\pi} = \frac{2\chi_c^2\,q(\chi)}{\chi^4}\,\frac{d\sigma_\chi}{2\pi} \qquad (1,1')$$

als die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Einzelablenkung $\vec{\chi}$ in das Raumwinkelelement (bzw. Flächenelement der Tangentialebene) $d\sigma_\chi$ [das hier an die Stelle von $2\pi\chi\,d\chi$ in (1,1) tritt].

Das Einzelstreugesetz in der Form (1,1) bzw. (1,1') gilt strenggenommen nur für den Fall, daß die streuende Schicht ein einatomiges Gas ist. Für den experimentell besonders interessierenden Fall der

* S. Anm. 13, S. 84.

[7] W. Bothe, Z. Physik **54**, 161 [1929].

* H. A. Bethe, M. E. Rose u. L. P. Smith, Proc. Amer. philos. Soc. **78**, 573 [1938].

(1) says $\Xi(\chi) = \frac{W(\chi)}{2\pi}$ in the paper; both Ξ and W are probability densities.

Streuung an einer feinkristallinen Metallfolie kann der Interferenz- bzw. Struktureinfluß auf das Einzelstreugesetz durch Hinzufügung eines „Strukturfaktors" $S(\chi)$ auf der rechten Seite von (1,1) bzw. (1,1') berücksichtigt werden. Nimmt man an, daß die Schicht aus unregelmäßig gegeneinander orientierten und gleich großen Kristalliten von je N (gleichen) Atomen besteht, die mit $n, m = 1, 2, \ldots N$ numeriert seien, und sind r_{nm} die Abstände je zweier Atome eines Kristalliten, so erhält man nach dem von der Röntgen- bzw. Elektronenstrahl-Beugung an mehratomigen Gasen her geläufigen Verfahren[9] für den Strukturfaktor (in der für kleine Winkel χ gültigen Näherung) den Ausdruck:

$$S(\chi) = 1 + \frac{1}{N} \sum_{n \neq m} \sum \frac{\sin(k_0 \chi r_{nm})}{k_0 \chi r_{nm}} . \quad (1,3)$$

Durch Hinzufügung dieses Faktors erhält das Einzelstreugesetz eine Debye-Scherrer-Struktur. — Damit die der im folgenden entwickelten Theorie der Mehrfach- und Vielfachstreuung zugrundeliegende Voraussetzung der Inkohärenz aufeinanderfolgender Einzelstreuprozesse gültig ist, müssen die Kristallite, aus denen die Schicht besteht, klein genug sein, so daß in jedem derselben praktisch nur höchstens *ein* Einzelstreuprozeß stattfindet. — Der Einfluß des Strukturfaktors (1,3) ist besonders bei Mehrfachstreuung (d. h. bei Streuung an sehr dünnen Schichten) wesentlich; wir behalten uns vor, diesen Einfluß in der folgenden III. Mitteilung näher zu untersuchen.

Die mittlere Anzahl von Einzelstreuprozessen, die ein Teilchen auf seinem Wege durch die Schicht erfährt, ist definiert durch:

$$\Omega_0 = \int_0^\infty W(\chi)\, \chi\, d\chi . \quad (1,4)$$

Diese Größe Ω_0 spielt in der im folgenden zu entwickelnden Theorie nur eine mehr oder minder formale Rolle; im Fall von Vielfachstreuung, der uns hier in erster Linie interessiert, wird sie aus dem Ergebnis vollständig herausfallen. Der genaue Wert von Ω_0 ist physikalisch eigentlich ohne Bedeutung, da er vom genauen Verhalten von $W(\chi)$ bei kleinem Argument χ abhängt, d. h. von der Streuung an den äußersten Bereichen der Atomhüllen, wo diese sich gegenseitig stören und durchdringen. — Die entscheidende Rolle für die resultierende Streuwinkelverteilung bei Vielfachstreuung (und für deren asymptotisches Verhalten bei großem Argument auch im Fall von Mehrfachstreuung) wird eine Größe spielen, die wir mit b bezeichnen und folgendermaßen definieren:

$$b \quad \lim_{\chi_g \to \infty} \left[\frac{1}{\chi_c^2} \int_0^{\chi_g} W(\chi)\, \chi^3\, d\chi - \log\left(\frac{\gamma \chi_g}{e \chi_c} \right)^2 \right] \quad (1,5)$$

($\log \gamma = 0{,}577\ldots$ = Eulersche Konstante; $\log e = 1$)[10]. Da, wie schon erwähnt, Ω_0 nach (1,4) in den Endformeln für Vielfachstreuung nicht mehr vorkommt, ist es zweckmäßig, für diesen Fall eine weitere, nur von b abhängige Größe

$$\Omega_b = (\gamma^2/e)\, e^b \quad (1,6)$$

[vgl. die Formeln (5,4) und (7,1)] einzuführen, die an Stelle von Ω_0 als ein praktisches Maß für die mittlere Anzahl von Einzelstreuprozessen in der Schicht dienen kann. Daß Ω_b nach (1,6) als ein solches Maß geeignet ist, erkennt man daraus, daß, wenn man für $q(\chi)$ in (1,1) die vereinfachte Formel I, (9,1) einsetzt, Ω_0 nach (1,4) und Ω_b nach (1,6) den gleichen Wert, und zwar

$$\Omega_b = \chi_c^2 / \chi_a^2 \quad (1,7)$$

annehmen. Der „Abschirmungswinkel" χ_a wurde dabei nach I, (9,3) so festgelegt, daß (1,7) auch gültig bleibt, wenn für $q(\chi)$ nicht I, (9,1), sondern der genauere Funktionsverlauf nach I, (8,4) und I, (8,6) eingesetzt wird. [Ω_0 nach (1,4) ist dann nicht mehr genau gleich Ω_b, jedoch von gleicher Größenordnung.] Mit χ_c nach (1,2) und χ_a nach I, (9,3) folgt für Ω_b die in der Zusammenfassung zu Beginn dieser Arbeit unter (IV) angegebene Formel. [Es sei noch darauf hingewiesen, daß (1,7) bzw. (IV) nur ohne Berücksichtigung des Strukturfaktors $S(\chi)$ nach (1,3) gültig ist; die Definitionsgleichungen (1,4) und (1,5) gelten dagegen allgemein und insbesondere auch bei Mitberücksichtigung des Strukturfaktors in $W(\chi)$. — Die zur Berücksichtigung des Energieverlustes notwendigen Verallgemeinerungen sind im § 6 angegeben.]

§ 2. Williams' Theorie der Vielfachstreuung

Die Williamssche Theorie beruht auf der Einführung eines Grenzwinkels χ_g unter der An-

[9] S. z. B. M. v. Laue, Materiewellen und ihre Interferenzen, Leipzig 1944, S. 75 ff.

[10] Die Definition von b nach (1,5) ist so gewählt, daß Gl. (5,4), S. 85, eine möglichst bequeme Gestalt annimmt.

nahme, daß die Streuwinkel $\Theta > \chi_g$ durch Einfachstreuung zustande kommen, während die elementaren Streuwinkel $\chi < \chi_g$ zur Vielfachstreuung beitragen. Der für große Θ maßgebliche Einfachstreuungsanteil der Winkelverteilung folgt direkt aus (1,1) zu

$$f(\Theta)_{\text{Einf.}}\,\Theta\,d\Theta = \frac{2\,\chi_c^2\,d\Theta}{\Theta^3}\,. \qquad (2,1)$$

Für den Vielfachstreuungsanteil haben wir das zu den Einzelstreuwinkeln $\chi < \chi_g$ gehörige mittlere Winkelquadrat zu bestimmen. Für dieses ergibt sich nach (1,1) mit I, (9,1):

$$\Theta^2 \int_0^{\chi_g} W(\chi)\,\chi^3\,d\chi = \chi_c^2\left[\log\frac{\chi_g^2}{\chi_a^2} - 1\right]. \qquad (2,2)$$

Da alle Teilchen bezüglich der Winkelstreuung gleiche Chancen haben, wird der bei kleinen Θ maßgebliche Vielfachstreuungsanteil der Winkelverteilung durch die Gauß-Funktion

$$f(\Theta)_{\text{Vielf.}}\,\Theta\,d\Theta = \frac{2\,\Theta\,d\Theta}{\Theta^2}\,e^{-\Theta^2/\Theta^2} \qquad (2,3)$$

wiedergegeben. — Entscheidend ist nun die Festlegung des Grenzwinkels χ_g. Dieser muß erstens der Bedingung

$$\chi_g^2 \ll \Theta^2 = \chi_c^2\left[\log\frac{\chi_g^2}{\chi_a^2} - 1\right] \qquad (2,4\,\text{a})$$

genügen, wenn anders die Streuwinkel $\chi < \chi_g$ als Beiträge zur Vielfachstreuung betrachtet werden können. Außerdem muß die Gesamtwahrscheinlichkeit für Einfachstreuung, die sich durch Integration über (1,1) zwischen den Grenzen χ_g und ∞ zu χ_c^2/χ_g^2 ergibt, $\ll 1$ sein, d. h. es muß als weitere Bedingung für χ_g

$$\chi_g^2 \gg \chi_c^2 \qquad (2,4\,\text{b})$$

gelten. Die gleichzeitige Erfüllung der beiden Bedingungen (2,4a u. b) ist (außer bei extrem großer Schichtdicke) nur unbefriedigend möglich. Ferner erfährt der Vielfachstreuungsanteil (2,3) bei kleinem Argument Θ durch das gleichzeitige Auftreten der Einfachstreuung eine beträchtliche Erniedrigung, deren genaue Bestimmung schwierig ist. Williams überwindet diese Schwierigkeiten teilweise dadurch, daß er nicht einen, sondern zwei Grenzwinkel einführt und den Zwischenbereich nachträglich annähernd berücksichtigt. Trotz dieser Verfeinerung bleibt die Williamssche Theorie nicht frei von Willkürlichkeiten und insbesondere ist die Behandlung des Überganges zwischen Vielfach- und Einfachstreuung in ihr sehr unbefriedigend.

§ 3. Das statistische Verfahren von Wentzel

Das Wentzelsche Verfahren, das auch wir zugrunde legen, besteht darin, zunächst die Beiträge zur gesamten Winkelverteilung zu bestimmen, die von jeweils denjenigen Teilchen herrühren, die in der Schicht gerade 0-mal, 1-mal, 2-mal, 3-mal,... n-mal,... usw. gestreut worden sind. Die gesamte Winkelverteilung ergibt sich dann als Summe aller dieser Beiträge.

Wir gehen aus von der in (1,1') gegebenen Wahrscheinlichkeit $W(\vec{\chi})\,d\sigma_\chi/2\pi$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß *keine* Ablenkung in das Raumwinkelelement $d\sigma_\chi$ stattfindet, ist

$$[1 - W(\vec{\chi})\,d\sigma_\chi/2\pi]\,,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$e^{-W(\vec{\chi})\,d\sigma_\chi/2\pi}\,.$$

Das Produkt aller dieser zu den verschiedenen Raumwinkelelementen $d\sigma_\chi$ gehörigen Wahrscheinlichkeiten, für das wir mit Benutzung von (1,3): $e^{-\Omega_0}$ schreiben können, stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß ein Teilchen auf seinem Wege durch die Schicht *überhaupt keine* Streuung erfährt. Der von den überhaupt nicht gestreuten Teilchen herrührende (im allgemeinen äußerst kleine) Anteil der endgültigen Winkelverteilungsfunktion ist daher:

$$f_0(\vec{\Theta})\,\frac{d\sigma_\Theta}{2\pi} = e^{-\Omega_0}\,\delta_2(\vec{\Theta})\,\frac{d\sigma_\Theta}{2\pi}\,, \qquad (3,1\,\text{a})$$

wobei $\delta_2(\vec{x})$ die zweidimensionale Diracsche δ-Funktion [definiert durch $\int\int u(\vec{x})\,\delta_2(\vec{x})\,d\sigma_x/2\pi = u(0)$] bedeutet. Weiter ergibt sich für den Beitrag der einmal gestreuten Teilchen zur Winkelverteilung:

$$f_1(\vec{\Theta})\,\frac{d\sigma_\Theta}{2\pi} = e^{-\Omega_0}\,W(\vec{\Theta})\,\frac{d\sigma_\Theta}{2\pi}\,. \qquad (3,1\,\text{b})$$

Es ist dies die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auf der Strecke l ein einziger Streuprozeß mit der Winkelablenkung $\vec{\Theta}$ in $d\sigma_\Theta$ auftritt. Die Anteile der 2-fach, 3-fach,... n-fach gestreuten Teilchen sind nun, ausgehend von (3,1b), schrittweise mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel zu erhalten:

$$f_n(\vec{\Theta}) = \frac{1}{n}\int\int f_{n-1}(\vec{\Theta} - \vec{\chi})\,W(\vec{\chi})\,\frac{d\sigma_\chi}{2\pi}\,. \qquad (3,1\,\text{c})$$

$f_n(\vec{\Theta})\, d\sigma_\Theta\, 2\pi$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Schicht n Streuprozesse stattfinden mit einer Gesamtablenkung in Richtung $\vec{\Theta}$ in $d\sigma_\Theta$. [Durch den Faktor $1/n$ in (3,1c) wird dafür gesorgt, daß jede Kombination von n verschiedenen Streuprozessen unabhängig von der Reihenfolge nur einmal gezählt wird. Bei schrittweiser Elimination von f_{n-1}, f_{n-2} usw. setzen sich die $1/n$, $1/(n-1)$ usw. zu $1/n!$ neben einem Produkt von n Wahrscheinlichkeiten W im Integranden zusammen.]

Dies ist das Verfahren von G. Wentzel[3]. Dieser selbst ist weiterhin so vorgegangen, daß er die einzelnen Anteile f_n der Winkelverteilungsfunktion schrittweise nach einem graphischen Verfahren [auf Grund von (3,1c) und einem dem damaligen Stande der Theorie entsprechenden Ansatz für das Einzelstreugesetz mit Abschirmung] berechnete und summierte.

§ 4. Summation durch Fourier-Transformation

Wir werden jetzt die verschiedenen Funktionen durch Fourier-Integrale und zwar wegen der Zylindersymmetrie durch Integrale über die Bessel-Funktion J_0 ausdrücken. Solche Fourier-Integrale[11] haben die folgende Eigenschaft: Seien

$$u_1(\vec{x}) = \int_0^\infty v_1(y)\, J_0(x\,y)\, y\, dy$$

und

$$u_2(\vec{x}) = \int_0^\infty v_2(y)\, J_0(x\,y)\, y\, dy$$

zwei zylindersymmetrische Funktionen in der x-Ebene, so gilt für das „Faltungsprodukt"[12]:

$$\int\int u_1(\vec{x}-\vec{x'})\, u_2(\vec{x'})\, \frac{d\sigma_{x'}}{2\pi} = \int_0^\infty v_1(y)\, v_2(y)\, J_0(x\,y)\, y\, dy\,. \quad (4,1)$$

Setzen wir daher für die Wahrscheinlichkeit (1.1):

$$W(\chi)\,\chi\, d\chi = \chi\, d\chi \int_0^\infty \Omega(y)\, J_0(\chi\, y)\, y\, dy \quad (4,2)$$

und benutzen zugleich die Fourier-Darstellung der soeben eingeführten zweidimensionalen δ-Funktion: $\delta_2(\vec{x}) = \int_0^\infty J_0(x\,y)\, y\, dy$, so folgt für die verschiedenen Anteile (3,1) der Winkelverteilungsfunktion:

$$f_n(\Theta) = \frac{e^{-\Omega_0}}{n!} \int_0^\infty \Omega^n(y)\, J_0(\Theta\, y)\, y\, dy \quad (4,3)$$

und somit für die gesamte Winkelverteilung:

$$f(\Theta)\,\Theta\, d\Theta = \Theta\, d\Theta \int_0^\infty e^{\Omega(y)-\Omega_0}\, J_0(\Theta\, y)\, y\, dy\,. \quad (4,4)$$

Die hierin einzusetzende Funktion $\Omega(y)$ folgt aus der nach (1,1) bekannten Wahrscheinlichkeit $W(\chi)$ durch Fourier-Umkehrung von (4,2):

$$\Omega(y) = \int_0^\infty J_0(\chi\, y)\, W(\chi)\, \chi\, d\chi\,. \quad (4,5)$$

Die Formel (4,4) wurde bereits von W. Bothe (1922[4]) auf anderem Wege aufgestellt. Die hier gegebene Ableitung erschien uns nützlich, insofern sie die Beziehung zur Wentzelschen Theorie deutlich macht. — Unser weiteres Ziel besteht darin, Gl. (4,4) in einer für alle Θ (d. h. vom Bereich der Vielfach- bzw. Mehrfachstreuung bei kleinen Winkeln bis zum „Einfachstreuungs-Schwanz" einschließlich des Übergangsbereiches) gültigen Weise auszuwerten. Bei Vielfachstreuung (im weiteren Sinne) vereinfacht sich dies durch die in den folgenden Abschnitten durchgeführten Entwicklungen. Liegt Mehrfachstreuung (im weiteren Sinne, d. h. Streuung an einer sehr dünnen Schicht) vor, so bleibt man auf die direkte Auswertung der Integralformel (4,4) [zusammen mit (4,5), (1,1) und der in I berechneten Abschirmungsfunktion $q(\chi)$] angewiesen. Wie dies in verhältnismäßig einfacher Weise geschehen kann, wird im Tl. III am Beispiel spezieller Experimente gezeigt werden[13]; dabei wird es notwendig sein, den Strukturfaktor $S(\chi)$ nach (1,3) mit zu berücksichtigen.

[11] Über die Bezeichnung „Fourier"-Integral vgl. I, Anm. 21, S. 145.

[12] Beweis siehe Anhang A.

[13] Das dabei benutzte Verfahren besteht in der Verwendung geeigneter analytischer Darstellungen, für die die Transformationen (4,4) und (4,5) leicht ausführbar sind.

§ 5. Spezialisierung für Vielfachstreuung

Benutzt man für $q(\chi)$ in (1,1) die vereinfachte Darstellung I, (9.1), so läßt sich das Integral (4,5) für $\Omega(y)$ mit Hilfe der in I, Anhang, Gl. (A, 3′) angegebenen Transformationsformel auf eine der dort in (A, 2) eingeführten Funktionen $L_p(x)$ zurückführen, und zwar folgt:

$$\Omega(y) = 2\,\Omega_0\,L_1(y\,\chi_a)\,, \qquad (5,1)$$

wobei $\Omega_0 = \chi_c^2/\chi_a^2$ ist. (5,1) in (4,4) eingesetzt, ergibt die resultierende Winkelverteilung $f(\Theta)$ in Abhängigkeit von zwei Parametern Ω_0 und χ_a bzw. χ_c und χ_a. Der Parameter χ_c betrifft dabei nur den Maßstab der Streuwinkel Θ. Um dies deutlich zu machen, führen wir in (4,4) und (5,1) die neue Integrationsvariable $y' = y\,\chi_c$ ein und eliminieren χ_a. Schreiben wir zugleich $\Omega(y')$ an Stelle von $\Omega(y)$, so lautet damit (4,4):

$$f(\Theta)\,\Theta\,d\Theta = \frac{\Theta\,d\Theta}{\chi_c^2}\int_0^\infty e^{\Omega(y')-\Omega_0}J_0\left(\frac{\Theta}{\chi_c}\,y'\right)y'\,dy' \qquad (5,2)$$

und (5,1):

$$\Omega(y') = 2\,\Omega_0\,L_1(y'/\Omega_0^{1/2})\,. \qquad (5,1')$$

Bezieht man somit Θ auf χ_c als Winkeleinheit, so ist die Gestalt der Winkelverteilung durch den einzigen Parameter Ω_0 bestimmt. Solange Ω_0 klein ist (Mehrfachstreuung), hängt diese Gestalt allerdings von der speziellen Wahl der Darstellung für die Abschirmungsfunktion $q(\chi)$ ab. Wir interessieren uns hier aber für den Fall, daß Vielfachstreuung (im weiteren Sinne) vorliegt, d. h. die mittlere Anzahl von Einzelstreuakten Ω_0 eine große (praktisch meist sehr große) Zahl ist. Dies hat zur Folge, daß es nur auf das asymptotische Verhalten bei kleinem Argument der (monoton fallenden) Funktion L_1 in (5,1′), d. h. auf einen Bereich der Variablen $y' \ll \Omega_0^{1/2}$ ankommt, da $\Omega(y')$ in (5,2) im Exponenten auftritt. Entwickeln wir daher (5,1′) mit Benutzung der bekannten Potenzreihe von L_1 (bzw. der Hankel-Funktion $H_1^{(1)}$), so folgt:

$$\Omega(y') - \Omega_0 = \left(\frac{y'}{2}\right)^2 \log\frac{(\gamma\,y'/2)^2}{e\,\Omega_0} + \frac{(y'/2)^4}{2\,\Omega_0}\log\frac{(\gamma\,y'/2)^2}{e^{2,5}\,\Omega_0} + \ldots \qquad (5,3)$$

(mit $\log\gamma = 0.5772\ldots$ und $\log e = 1$). Das zweite Glied (und die folgenden) auf der rechten Seite von (5,3) wird erst bei $y' \approx \Omega_0^{1/2}$, wo die Exponentialfunktion im Integranden von (5,2) praktisch nichts mehr beiträgt, von gleicher Größenordnung wie das erste. Beschränken wir uns daher auf das erste Glied rechts in (5,3), so folgt:

$$\Omega(y') - \Omega_0 = \frac{y'^2}{4}\left[\log\frac{y'^2}{4} - b\right] \qquad (5,4)$$

mit Benutzung von (1,5) und (1,6) und unter Beachtung, daß $\Omega_0 = \Omega_0$, für den hier zunächst benutzten speziellen Ansatz für $W(\chi)$ nach (1,1) mit I, (9,1). Gl. (5,4) ist aber unabhängig von diesem speziellen Ansatz, wie man leicht zeigt, indem man eine rascher als χ^{-4} abfallende und sonst willkürliche Zusatzfunktion zu dem bisherigen $W(\chi)$ hinzufügt; diese liefert Zusatzglieder zu Ω_0 bzw. b, die genau den Definitionsgleichungen (1,4) bzw. (1,5) entsprechen, ohne jedoch zu dem logarithmischen Gliede in (5,4) einen Beitrag zu liefern. — Damit folgt für die Streuwinkelverteilung (5,2) (unter Fortlassung des Striches an y'):

$$f(\Theta)\,\Theta\,d\Theta = \frac{\Theta\,d\Theta}{\chi_c^2}\int_0^{\Omega_0^{1/2}} y\,dy\,J_0\left(\frac{\Theta}{\chi_c}\,y\right)e^{\frac{y^2}{4}\left(-b+\log\frac{y^2}{4}\right)}. \qquad (5,5)$$

Dabei ist als obere Integrationsgrenze $\Omega_0^{1/2}$ statt unendlich gesetzt. Bei Benutzung der genauen Funktion $\Omega(y')$ nach (5,1′) wäre dies belanglos, da, wie erwähnt, der Integrand an und oberhalb dieser Stelle praktisch nichts mehr beiträgt. Die Entwicklung (5,3) versagt jedoch, wie wir sahen, etwa von der gleichen Stelle an, und insbesondere zeigt sich, daß das erste Glied rechts in (5,3), das sich bei kleinen y' dem genauen Verlauf von $\Omega(y') - \Omega_0$ gut anschmiegt, nahe bei $y' = \Omega_0^{1/2}$ ein Minimum hat, oberhalb dessen es schließlich sogar zu großen positiven Werten ansteigt. Bei Erstreckung der Integration bis unendlich würde daher der Bereich $y' > \Omega_0^{1/2}$ fälschlich einen divergierenden Beitrag liefern. — Die genaue Funktion $\Omega(y')$ nach (5,1′) geht bei großem y' ($> \Omega_0^{1/2}$) exponentiell gegen Null, und die Exponentialfunktion im Integranden von (5,2) damit gegen den konstanten, sehr kleinen Wert $e^{-\Omega_0}$ der dem Beitrag (3,1a) der ungestreut durchgehenden Teilchen entspricht. Dieser und die folgenden Beiträge der nur selten gestreuten Teilchen (d. h. die $f_n(\Theta)$ nach (3,1) mit $n \ll \Omega_0$) werden also in (5,5) vernachlässigt; der Einfluß dieser Beiträge beschränkt sich auf einen Bereich sehr kleiner Winkel Θ [von der Größenordnung χ_a] und ist wegen des Faktors $e^{-\Omega_0}$ in (3,1) verschwindend klein.

Das logarithmische Glied im Exponenten von (5,5) ist hauptsächlich nur für das Verhalten von $f(\Theta)$ bei großem Argument Θ und insbesondere den „Einfachstreuungs"-Bereich wesentlich (vgl. die §§ 7 u. 8). Eine grobe Annäherung für kleine Θ erhält man daher, indem man $\log(y^2/4)$ streicht, wobei (5,5) in die Darstellung einer Gauß-Funktion mit dem mittleren Winkelquadrat

$$\overline{\Theta^2} = \chi_c^2 b \qquad (5,6)$$

übergeht. Deutet man diese als den „Vielfachstreuungs"-Anteil (2,3) der Williamsschen Theorie, so zeigt der Vergleich von (5,6) mit (2,2), daß dies einer Wahl des Grenzwinkels

$$\chi_g = (e/\gamma)\,\chi_c = 1{,}525\,\chi_c \qquad (5,7)$$

entspricht, was im allgemeinen gut in die durch (2,4a u. b) gegebenen Grenzen paßt. — Die Gauß-Funktion mit der Breite (5,6) stellt jedoch noch nicht die dem Verlauf von $f(\Theta)$ bei kleinen Θ bestangepaßte Gauß-Funktion dar (vgl. hierzu den Schlußabsatz von § 2). Im § 7 werden wir daher eine andere, dem Gesamtverlauf von $f(\Theta)$ besser angepaßte Gauß-Funktion mit der etwas größeren Breite $\chi_c^2 B$ als nullte Näherung abspalten.

Der Zusammenhang der Theorie der Vielfachstreuung von Goudsmit und Saunderson mit der unseren ergibt sich wie folgt: Ersetzt man die Legendreschen Kugelfunktionen $P_l(\cos\Theta)$, nach denen in dieser Theorie $f(\Theta)$ entwickelt wird, durch den für kleine Θ gültigen asymptotischen Ausdruck $J_0\left(\left[l+\frac{1}{2}\right]\Theta\right)$ [vgl. I, Anhang, Gl. (A,1)] und geht von der Summe über den Index l zu einem Integral über, so erhält man (abgesehen von der speziellen Form des zugrunde gelegten Einzelstreugesetzes) genau unsere Formel (5,5) für $f(\Theta)$. Das Abbrechen der Integration an der Stelle $y \approx \Omega_0^{1/2}$ entspricht dabei dem Abbrechen der Kugelfunktionsreihe bei Goudsmit und Saunderson. — Obgleich die Entwicklung nach Kugelfunktionen für beliebige Streuwinkel gültig ist, bleibt die Gültigkeit der Theorie von Goudsmit und Saunderson doch nur auf kleine Winkel beschränkt wegen der dieser Theorie (wie auch der von Williams und der unseren) zugrunde liegenden Voraussetzung gleicher, in der Schicht zurückgelegter Wegstrecken. Die von Goudsmit und Saunderson angegebene „Korrektur erster Näherung" zur Berücksichtigung der durch Streuung verursachten Wegverlängerung ist nicht nur unzureichend, sondern auch unrichtig. (Diese Korrektur soll darin bestehen, für die Weglänge die durch $\overline{\cos\Theta}$ dividierte Schichtdicke einzusetzen. Dieser über alle Winkel Θ genommene Mittelwert $\overline{\cos\Theta}$ hat jedoch mit der mittleren Weglänge, die durch Mittelung über alle Elemente dl der Schichtdicke zu definieren wäre, nichts zu tun und berücksichtigt überdies nicht die bei größeren Winkeln wesentliche Kopplung zwischen Weglänge und Streuwinkel.) — Goudsmit und Saunderson werten ihre Formeln rein numerisch aus und teilen die Ergebnisse in Tabellenform mit. Nur für einige charakteristische Größen geben sie Interpolationsformeln an, die zum Vergleich mit unseren Reihenentwicklungen (§§ 7 bis 10) geeignet sind (vgl. Anm. 20, S. 92).

§ 6. Berücksichtigung des Energieverlustes

Bevor wir das Ergebnis des letzten Abschnittes weiter auswerten, wollen wir es so verallgemeinern, daß es auch dem Energieverlust der Teilchen in der Schicht Rechnung trägt. — Es sei jetzt E_0 die Energie, mit der die Teilchen auf die streuende Schicht treffen; nach Zurücklegung eines Weges l' in der Schicht sei die Energie auf einen Wert $E(l')$ abgesunken. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen auf einem kleinen Wegstück dl' eine Einzelablenkung um einen Winkel χ innerhalb $d\chi$ erfährt, sei [analog zu (1,1) und mit I, (9,1)]:

$$w(\chi, l')\,\chi\,d\chi\,dl' = \frac{2\,\chi_c'^2(l')}{[\chi^2+\chi_a^2(l')]^2}\,\chi\,d\chi\,dl'\,. \qquad (6,1)$$

Dabei ist ähnlich wie in (1,2) die Winkelkonstante

$$\chi_c'(l') = (a/k_0)\sqrt{4\pi N} \qquad (6,2)$$

und der Abschirmungswinkel χ_a nach I, (9,3):

$$\chi_a(l') = (1/a\,k_0)\sqrt{1{,}13+3{,}76\,a^2} \qquad (6,3)$$

(a = Thomas-Fermi-Radius) benutzt. χ_c' und χ_a sind jetzt (vermöge α und k_0) von der Energie $E(l')$ und damit von l' abhängig. Analog zu (4,5) führen wir nun die zu $w(\chi, l')$ „Fourier"-transformierte Größe

$$\omega(y, l') = \int_0^\infty J_0(y, \chi)\,w(\chi, l')\,\chi\,d\chi \qquad (6,4)$$

ein. Die Gesamtwahrscheinlichkeit einer Einzelstreuung in $d\chi$ beim Durchgang durch die Schicht (d. h. auf einem Wege l) ist dann an Stelle von (1,1) gegeben durch

$$W(\chi)\,\chi\,d\chi = \int_0^l w(\chi, l')\,dl'\,, \qquad (6,5)$$

woraus für $\Omega(y)$ nach (4,5) folgt:

$$\Omega(y) = \int_0^l \omega(y, l')\,dl'\,. \qquad (6,6)$$

Für die Entwicklung von $\omega(y, l')$ erhält man nun ähnlich wie (5,4):

$$\omega(y, l') - \omega(0, l') = \left(\frac{y\,\chi_c'}{2}\right)^2 \log\left(\frac{\gamma\,y\,\chi_a}{\sqrt{e}\,2}\right)^2 + \ldots \qquad (6,7)$$

Bei Beschränkung auf das erste Glied rechts in (6,7) folgt daraus wegen (6,6) die Formel:

$$\Omega(y) - \Omega_0 = \int_0^l dl' \left(\frac{y\chi_c'}{2}\right)^2 \log\left(\frac{\gamma y \chi_a}{\sqrt{e}\,2}\right)^2, \quad (6,8)$$

die jetzt an die Stelle von (5,4) tritt. Setzen wir nun an Stelle von (1,2):

$$\chi_c^2 = \int_0^l dl'\, \chi_c'^2(l') \quad (6,9)$$

und führen einen „mittleren Abschirmungswinkel" $\overline{\chi_a}$ ein gemäß:

$$\chi_c^2 \log \overline{\chi}_a^2 = \int_0^l dl'\, \chi_c'^2(l') \log \chi_a^2(l'), \quad (6,10)$$

so nimmt (6,8) bei Übergang zur Variablen $y' = y\chi_c$ und mit der als bloße Substitution zu verstehenden (und zugleich jetzt b nach (1,6) definierenden) Größe

$$\Omega_b = \chi_c^2/\overline{\chi}_a^2 \quad (6,11)$$

formal die gleiche Gestalt an wie (5,4). Es folgt daher für die resultierende Streuwinkelverteilung wieder die Gl. (5,5), wobei nur χ_c nach (6,9) an Stelle von (1,2) und $\overline{\chi_a}$ nach (6,10) an Stelle von χ_a einzusetzen ist.

Bisher haben wir über die Art des Energieabfalls $E(l')$ noch keinerlei Annahmen gemacht. Es kann vorkommen, daß (wie beim Energieabfall infolge Emission von Bremsstrahlung) die Energie $E(l')$ gar keinen festen Wert hat, sondern einem Wahrscheinlichkeitsgesetz folgt, wobei dann zum Schluß über alle möglichen Energieabläufe in der Schicht zu mitteln ist. In diesem Sinne werden wir die Formeln dieses Abschnitts auch in der Schauertheorie anwenden. Hier wollen wir nun noch den Fall näher betrachten, daß der Energieverlust der in der Schicht zurückgelegten Wegstrecke l' proportional ist („Bremsung durch Ionisation"), und zwar für den extrem relativistischen Grenzfall großer Energie, in dem $v = c$ (und damit $\alpha = zZ/137 = \text{const.}$) und $E = cp = c\hbar k_0$ gesetzt werden kann. Ist l_0 die Strecke, auf der die Teilchen ihre gesamte Anfangsenergie E_0 verlieren würden, so daß

$$E(l') = E_0(1 - l'/l_0) \quad (6,12)$$

gilt, so folgt nach einfacher Rechnung:

$$\chi_c^2 = \chi_c^{(0)2}/(1 - l/l_0) \quad (6,13\,a)$$

und

$$b = b^{(0)} + 2 + (2\,l_0/l - 1)\log(1 - l_0/l)$$
$$= b^{(0)} - l^2/(6\,l_0^2) - \ldots \quad (6,13\,b)$$

Dabei sind χ_c^0 und $b^{(0)}$ die entsprechenden Größen, wie sie sich ohne Berücksichtigung des Energieverlustes ergeben würden.

Mit (6,13 a u. b) läßt sich nun auch der Fall behandeln, daß die Teilchen beim Durchgang durch die streuende Schicht einen beträchtlichen Teil ihrer anfänglichen Energie durch Ionisation verlieren. Dieser Fall tritt (wenn die Schichtdicke zur Energie passend stets so gewählt wird, daß die Streuwinkel von gleicher Größenordnung bleiben) von einer gewissen großen Energie an auf und ist insbesondere für schwerere Teilchen (Mesonen, Protonen usw.) wesentlich, bei denen sich die (erst bei höherer Energie merklich einsetzende) Bremsstrahlung nicht störend der Ionisationsbremsung überlagert. — Der Ansatz (6,12) streng streckenproportionaler Bremsung ist nur bei sehr großer Energie der Teilchen, wie sie z. B. in der kosmischen Strahlung auftritt, brauchbar. Bei niedrigerer Energie wird es erforderlich, (6,9) und (6,10) numerisch zu integrieren, was an späterer Stelle nachgeholt werden soll.

Wir fügen hier noch die weitere Verallgemeinerung für den Fall an, daß außer dem Energieverlust der gestreuten Teilchen längs ihres Weges zugleich auch die Zusammensetzung der streuenden Schicht aus mehreren, mit einem Index $i = 1, 2, 3, \ldots$ numerierten Atomsorten berücksichtigt werden soll. In diesem Fall haben wir an Stelle von (6,1) von den auf jede Stoffkomponente getrennt bezogenen Wahrscheinlichkeiten $w_i(\chi, l')\,\chi\, d\chi\, dl'$ auszugehen. Alle weiteren Überlegungen dieses Abschnitts ändern sich nur insofern, als zu der Integration über l' noch eine Summation über i hinzuzufügen ist. Insbesondere folgt also statt (6,9) und (6,10):

$$\chi_c^2 = \sum_i \int_0^l dl'\, \chi_{ci}'^2(l') \quad (6,9')$$

und

$$\log \overline{\chi}_a^2 = (1/\chi_c^2) \sum_i \int_0^l dl'\, \chi_{ci}'^2(l') \log \chi_{ai}^2(l'), \quad (6,10')$$

woraus wiederum Ω_b gemäß (6,11) zu bilden ist. In (6,9′) und (6,10′) sind die Größen χ_{ci}' und χ_{ai} durch (6,2) bzw. I, (9,3), jedoch mit Z_i und N_i an Stelle von Z und N gegeben. Mit diesen Verallgemeinerungen der Parameter χ_c und Ω_b bleibt im übrigen die Theorie der Vielfachstreuung unverändert erhalten. — Auch wenn nicht Vielfach-, sondern nur Mehrfachstreuung vorliegt, ist eine entsprechende Verallgemeinerung möglich: In diesem Falle definiert man wiederum zweckmäßig χ_c^2 durch (6,9′); damit dann

$$W(\chi) = 2\,\chi_c^2\, q(\chi)/\chi^4$$

gemäß (1,1) erhalten bleibt, muß man ähnlich wie in (6,10′):

$$q(\chi) = (1/\chi_c^2) \sum_i \int_0^l q_i(\chi, l')\, \chi_{ci}'^2(l')\, dl' \quad (6,14)$$

setzen, wobei $q_i(\chi, l')$ das Verhältnis $Q/Q_{\text{Ruth.}}$ für die i-te Stoffkomponente und die Teilchenenergie an der Wegstelle l' bedeutet. Auch der Strukturfaktor (1.3) kann gegebenenfalls in $q(\chi)$ einbezogen werden.

§ 7. Entwicklung der Verteilungsfunktion für den räumlichen[14] Streuwinkel Θ

Wir knüpfen an die Betrachtungen des § 5 über den Vergleich mit der Theorie von Williams an: Dabei war es wesentlich, daß nicht nur die Größe Ω_b eine große Zahl ist, sondern zugleich auch die Größe b ($\approx \log \Omega_b$) zum mindesten ein Mehrfaches von Eins ist, wenn anders von Vielfachstreuung die Rede sein kann. Es liegt daher nahe, zur weiteren Auswertung den Integranden von (5,5) nach Potenzen von $(y^2/4)\log(y^2/4)$ zu entwickeln, was auf eine Entwicklung von $f(\Theta)$ nach fallenden Potenzen von b hinauslaufen würde. Dabei würden jedoch störende Glieder mit $\log b$ auftreten, die die Konvergenz des Verfahrens ungünstig beeinflussen würden. Dies läßt sich vermeiden, wenn man an Stelle von b eine neue Größe B einführt, die mit b bzw. Ω_b verknüpft ist durch

$$b = B - \log B \quad \text{bzw.} \quad \Omega_b = (\gamma^2/e)\, e^B/B \qquad (7,1)$$

($\gamma^2/e = 1{,}167$). Um die praktische Anwendung der im folgenden abzuleitenden Formeln zu erleichtern, sind in der folgenden Tabelle zu den vollen Zehnerpotenzen von Ω_b die zugehörigen Werte von B angegeben:

$\log_{10} \Omega_b =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$B =$	3,36	6,29	8,93	11,49	13,99	16,46	18,90	21,32	23.71

Tab. 1. B als Funktion von $\log_{10} \Omega_b$.

Zwischenwerte können hieraus leicht durch Interpolieren erhalten werden. — Führt man B nach (7,1) an Stelle von b in Gl. (5,5) ein und setzt anschließend $y\sqrt{B}$ gleich der neuen (im folgenden mit y bezeichneten) Integrationsvariablen, so erhält man statt (5,5):

$$f(\Theta)\,\Theta\,d\Theta = \frac{\Theta\, d\Theta}{\chi_c^2 B} \int_0^{y_{\max}} y\, dy\, J_0\left(\frac{\Theta}{\chi_c\sqrt{B}}\, y\right) e^{-\frac{y^2}{4} + \frac{y^2}{4B}\log\frac{y^2}{4}} \qquad (7,2)$$

(mit $y_{\max} \approx \sqrt{\Omega_0 \cdot B}$). In dieser Form kann nun $f(\Theta)$ ohne Schwierigkeiten nach fallenden Potenzen von B entwickelt werden. Geht man zugleich zu $\chi_c\sqrt{B}$ als Winkeleinheit über und bezeichnet mit

$$\vartheta = \Theta/(\chi_c \cdot \sqrt{B})$$

den in dieser Einheit gemessenen Winkel, so lautet die Entwicklung:

$$f(\vartheta)\,\vartheta\,d\vartheta = \vartheta\, d\vartheta \left\{2\, e^{-\vartheta^2} + \frac{1}{B} f^{(1)}(\vartheta) + \frac{1}{B^2} f^{(2)}(\vartheta) + \ldots\right\} \qquad (7,3\,\text{a})$$

mit

$$f^{(n)}(\vartheta) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty y\, dy\, J_0(\vartheta\, y)\, e^{-\frac{y^2}{4}} \left(\frac{y^2}{4} \log \frac{y^2}{4}\right)^n. \qquad (7,3\,\text{b})$$

(Bei Beschränkung auf endlich viele Glieder dieser Entwicklung darf als obere Integrationsgrenze statt des sehr großen aber endlichen $y_{\max}$ wieder ∞ gesetzt werden.) Die Normierung von $f(\vartheta)$ (7,3a) ist so gewählt, daß $\int_0^\infty f(\vartheta)\,\vartheta\, d\vartheta = 1$ ist; die entsprechenden Normierungsintegrale für $f^{(1)}(\vartheta)$, $f^{(2)}(\vartheta)$ usw. verschwinden. — Die Funktionen $f^{(1)}(\vartheta)$ und $f^{(2)}(\vartheta)$ nach (7,3b) sind im mathematischen Anhang (S. 94 ff.) auf einfache Integrale zurückgeführt[15]. Das Ergebnis dieser Rechnung für $f^{(1)}(\vartheta)$ sei hier angegeben[16]:

$$f^{(1)}(\vartheta) = 2\, e^{-\vartheta^2}\left\{(\vartheta^2 - 1)\left[\bar{E}i(\vartheta^2) - \log \vartheta^2\right] + 2 - e^{\vartheta^2}\right\}. \qquad (7,3\,\text{c})$$

Die Funktionen $f^{(1)}(\vartheta)$ und $f^{(2)}(\vartheta)$ sind in den Spalten I u. II der Tab. 2 tabuliert. Ferner ist der Verlauf von $\vartheta f^{(1)}(\vartheta)$ und $\vartheta f^{(2)}(\vartheta)$ zusammen mit $2\vartheta e - \vartheta^2$ in Abb. 1 graphisch wiedergegeben. Die genauere Diskussion des Verlaufes der $f^{(n)}(\vartheta)$ an Hand von Reihenentwicklungen und asymptotischen Formeln sowie die Berechnung von Mittelwerten möge weiter unten zugleich für die Verteilungsfunktion des projizierten Streuwinkels erfolgen, die wir zunächst ableiten wollen.

§ 8. Die Verteilung $f(\Phi)\,d\Phi$ der projizierten Streuwinkel

Bei Nebelkammerexperimenten wird meistens nicht der bisher allein betrachtete räumliche Streu-

[14] Wir bezeichnen hier Θ als „räumlichen" Streuwinkel (spatial angle) im Gegensatz zu dem auf eine die Einfallsrichtung enthaltende Ebene „projizierten" Streuwinkel (projected angle) Φ. Vgl. § 8.

[15] Auf die Möglichkeit hierzu wurde ich freundlicherweise von Hrn. Prof. Heisenberg aufmerksam gemacht.

[16] Bezeichnungen nach Jahnke-Emde, 3. Aufl.

I	II	III	IV	V
$f^{(1)}(\vartheta)$	$f^{(2)}(\vartheta)$	$\vartheta(q)$	$f^{(1)}(q)$	$f^{(2)}(q)$
+ 0,8456	+ 2,49	0	+ 0.0206	+ 0.416
+ 0,700	+ 2,07	0.2	— 0,0246	+ 0,299
+ 0,343	+ 1,05	0,4	— 0,1336	+ 0,019
— 0,073	— 0,003	0,6	— 0,2440	— 0,229
— 0,396	— 0,606	0,8	— 0,2953	— 0,292
— 0,528	— 0,636	1	— 0,2630	— 0,174
— 0,477	— 0,305	1,2	— 0,1622	+ 0,010
— 0,318	+ 0,052	1,4	— 0,0423	+ 0,138
— 0,147	+ 0,243	1,6	+ 0.0609	+ 0,146
0,000	+ 0,238	1,8	+ 0,1274	+ 0,094
+ 0,080	+ 0,131	2	+ 0,147	+ 0,045
+ 0,106	+ 0,020	2,2	+ 0.142	— 0,049
+ 0,101	— 0,046	2,4	+ 0,1225	— 0,071
+ 0,082	— 0,064	2,6	+ 0,100	— 0.064
+ 0,062	— 0,055	2,8	+ 0,078	— 0,043
+ 0,045	— 0,036	3	+ 0,059	— 0,024
+ 0,033	— 0,019	3,2	+ 0,045	— 0,010
+ 0,0206	+ 0,0052	3,5	+ 0,0316	+ 0,001
+ 0,0105	+ 0,0011	4	+ 0,0194	+ 0,006

Tab. 2. Die Funktionen $f^{(1)}(\vartheta)$, $f^{(2)}(\vartheta)$, $f^{(1)}(q)$ und $f^{(2)}(q)$.

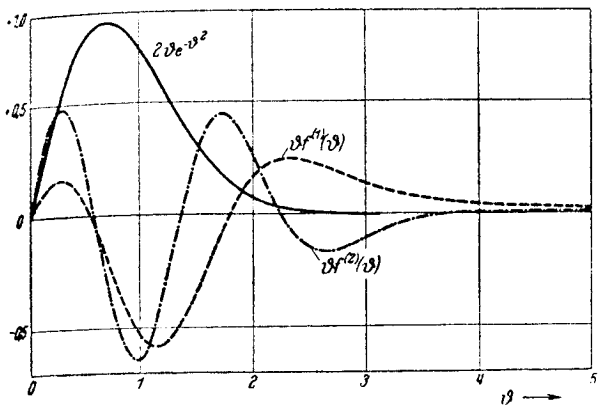

Abb. 1. Die Entwicklungskoeffizienten in Gl. (7,3a) für die Verteilung der räumlichen Streuwinkel.

winkel Θ gemessen, sondern dessen Projektion auf eine die Einfallsrichtung enthaltende Beobachtungsebene. Es sei Φ diese Projektion und Ψ die dazu senkrechte (nicht beobachtete) Winkelkomponente; die Verteilungsfunktion in Φ ergibt sich dann aus (5,5) bzw. (7,2) durch Integration über Ψ von $-\infty$ bis $+\infty$. Wir benutzen im folgenden wieder reduzierte Winkelvariable:

$$q = \Phi/(\chi_c \cdot \sqrt{B})$$

und entsprechend ψ. Um die Integration über ψ ausführen zu können, müssen wir zunächst (7,2) etwas umformen. Für die Exponentialfunktion im Integranden von (7,2) schreiben wir dabei kurz $g(y^2)$. [Im Bereich sehr großer $y \gtrsim y_{max}$ sei davon abweichend $g(y^2) = 0$ gesetzt, so daß als obere Integrationsgrenze ∞ genommen werden kann[17].] Setzt man für J_0 in (7,2) die bekannte Integraldarstellung ein, so erhält man damit:

$$f(\vartheta)\,\vartheta\,d\vartheta = \vartheta\,d\vartheta \int_0^\infty y\,dy\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iy\vartheta\cos\alpha}\,d\alpha\,g(y^2). \quad (8,1)$$

Benutzt man nun in der y-Ebene statt der Polarkoordinaten y, α kartesische Koordinaten y_1, y_2 und entspr. für ϑ die kartesischen Koordinaten φ und ψ und bemerkt, daß $y\vartheta\cos\alpha$ das Skalarprodukt $\vec{y}\,\vec{\vartheta} = y_1\varphi + y_2\psi$ bedeutet, so erhält man weiter für (8,1):

$$= \frac{dq}{2\pi}\frac{d\psi}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\frac{dy_1\,dy_2}{2\pi}\,e^{i(y_1 q + y_2\psi)}\,g(y_1^2+y_2^2). \quad (8,1')$$

Führen wir nun die Integration über ψ aus und bemerken, daß $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\psi\,e^{iy_2\psi} = \delta(y_2)$ die Fourier-Darstellung der gewöhnlichen (eindimensionalen) Diracschen δ-Funktion ist, so erhalten wir als Verteilungsfunktion des projizierten Winkels φ:

$$\frac{dq}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy_1\,e^{iy_1 q}\,g(y_1^2) = \frac{dq}{\pi}\int_0^\infty dy\,\cos(y_1 q)\,g(y_1^2). \quad (8,2)$$

Da wir im folgenden den projizierten Winkel stets positiv zählen wollen (Normierung: $\int_0^\infty f(\Phi)\,d\Phi = \int_0^\infty f(\varphi)\,d\varphi = 1$), so haben wir noch einen Faktor 2 hinzuzufügen; indem wir zugleich y statt y_1 schreiben, ergibt sich somit für die Verteilungsfunktion des projizierten Streuwinkels Φ:

$$f(\Phi)\,d\Phi = \frac{2\,d\Phi}{\pi\chi_c\sqrt{B}}\int_0^{y_{max}} dy\,\cos\left(\frac{\Phi}{\chi_c\sqrt{B}}y\right)e^{-\frac{y^2}{4}+\frac{y^2}{4B}\log\frac{y^2}{4}} \quad (8,3)$$

in vollständiger Analogie zu (7,2). Entwickelt man

[17] Vgl. die Bemerkungen im Anschluß an Gl. (5,5).

wie dort nach Potenzen von $1/B$, so folgt weiter:

$$f(\varphi)\,d\varphi = d\varphi \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\varphi^2} + \frac{1}{B} f^{(1)}(\varphi) + \frac{1}{B^2} f^{(2)}(\varphi) + \dots \right\} \tag{8,4a}$$

$$f^{(n)}(\varphi) = \frac{2}{\pi\, n!} \int_0^\infty dy \cos(\varphi y)\, e^{-\frac{y^2}{4}} \left(\frac{y^2}{4} \log \frac{y^2}{4} \right)^n. \tag{8,4b}$$

In den Spalten IV und V der Tab. 2 sind die Funktionen $f^{(1)}(\varphi)$ und $f^{(2)}(\varphi)$ tabuliert, und in Abb. 2 ist ihr Verlauf graphisch dargestellt. Die Rückführung von (8,4b) für $n = 1$ und 2 auf einfache Integrale ist wiederum im mathematischen Anhang durchgeführt [vgl. dort insbesondere die Gl. (D, 12) und (D, 13)].

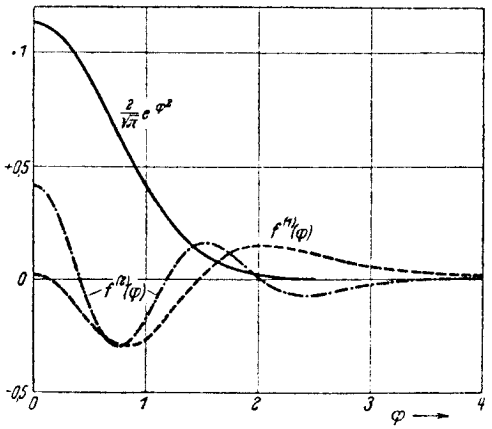

Abb. 2. Die Entwicklungskoeffizienten in (8,4a) für die projizierten Streuwinkel.

§ 9. Potenzreihen und asymptotische Formeln

Setzt man in Gl. (7,3b) die Potenzreihe der Bessel-Funktion J_0 bzw. in (8,4b) diejenige des Cosinus ein und führt anschließend die Integration über y aus, so erhält man für die Funktionen $f^{(n)}(\vartheta)$ bzw. $f^{(n)}(\varphi)$ die folgenden Potenzreihen:

$$f^{(1)}(\vartheta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\vartheta^2)^n}{n!} (n+1)\,\Psi(n+1) \tag{9,1a}$$
$$= 0{,}845_5 - 3{,}69_1\,\vartheta^2 + - \dots,$$

$$f^{(2)}(\vartheta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\vartheta^2)^n}{n!} \binom{n+2}{2} \cdot [\Psi^2(n+2) + \Psi'(n+2)] \tag{9,1b}$$
$$= 2{,}493 - 11{,}17\,\vartheta^2 + - \dots,$$

$$f^{(1)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varphi^2)^n}{n!} (n+1/2)\,\Psi(n+1/2) \tag{9,2a}$$
$$= 0{,}0206 - 1{,}190\,\varphi^2 + - \dots,$$

$$f^{(2)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varphi^2)^n}{n!} \binom{n+3/2}{2} [\Psi^2(n+3/2) + \Psi'(n+3/2)] \tag{9,2b}$$
$$= 0{,}416 - 3{,}27\,\varphi^2 + \dots$$

Diese Formeln geben das Verhalten der $f^{(n)}$ bei kleinem Argument an. Besser konvergierende und daher für die numerische Berechnung geeignete Entwicklungen erhält man, indem man eine Gauß-Funktion als Faktor abspaltet und den Restfaktor entwickelt. Z. B. für $f^{(1)}(\varphi)$ ergibt sich auf diese Weise an Stelle von (9,2a):

$$f^{(1)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\varphi^2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \varphi^2 \right) \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}} + \frac{\varphi^6}{2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} + \frac{\varphi^8}{3 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} + \dots \right\}. \tag{9,2a'}$$

Um auch das Verhalten der Funktionen $f^{(n)}$ bei großem Argument zu bestimmen, entwickeln wir die Gauß-Funktion $e^{-y^2/4}$ im Integranden von (7,3b) bzw. (8,4b) nach Potenzen des Exponenten. Die Integration über y läßt sich dann gliedweise mit Hilfe der Formel I, Anhang (A,4″) ausführen (vgl. auch Anhang C, S. 94). Auf diese Weise erhält man:

$$f^{(1)}(\vartheta) \approx \frac{2}{\vartheta^4} + \frac{8}{\vartheta^6} + \frac{36}{\vartheta^8} + \frac{192}{\vartheta^{10}} + \dots \approx \frac{2}{\vartheta^4 \left(1 - \frac{5}{\vartheta^2}\right)^{4/5}}, \tag{9,3a}$$

$$f^{(2)}(\vartheta) \approx \frac{16}{\vartheta^6} \left(\log \gamma\,\vartheta - \frac{3}{2} \right) + \frac{144}{\vartheta^8} \left(\log \gamma\,\vartheta - \frac{11}{6} \right) + \dots, \tag{9,3b}$$

$$f^{(1)}(\varphi) \approx \frac{1}{\varphi^3} + \frac{3}{\varphi^5} + \frac{11{,}25}{\varphi^7} + \frac{52{,}5}{\varphi^9} + \dots \approx \frac{1}{\varphi^3 \left(1 - \frac{9}{2\varphi^2}\right)^{2/3}}, \tag{9,4a}$$

$$f^{(2)}(\varphi) = \frac{6}{\varphi^5}\left(\log 2\gamma\varphi - \frac{25}{12}\right) + \frac{45}{\varphi^7}\left(\log 2\gamma\varphi - \frac{49}{20}\right) + \dots \qquad (9,4\,\mathrm{b})$$

Wie diese Formeln zeigen, gehen die Funktionen $f^{(1)}(\vartheta)$ bzw. $f^{(1)}(\varphi)$ bei großen Argumenten in das Rutherfordsche Gesetz der „Einfachstreuung" über[18]. Im Gegensatz zu den Annahmen der Williamsschen Theorie geht dieser Übergang jedoch sehr langsam vor sich; die Abweichungen vom Rutherfordschen Gesetz sind bis zu großen Argumenten hin noch beträchtlich und betragen z. B. bei $\vartheta \cong \varphi \cong 7$ noch etwa 10%. — Die Ersatzformeln auf der rechten Seite in (9,3a) und (9,4a) sind bereits von Argumenten $\gtrsim 3{,}2$ an gut brauchbar (mit Genauigkeiten von etwa 2 bzw. 1% an dieser Stelle).

§ 10. Mittelwerte

Es soll jetzt allgemein der Mittelwert $\bar{\vartheta}^k = \int_0^\infty f(\vartheta)\,\vartheta^{k+1}\,d\vartheta$ der k-ten Potenz des Gesamtstreuwinkels ϑ (in Einheiten $\chi_c\sqrt{B}$) bestimmt werden. Der von dem Gliede $\frac{1}{B^n} f^{(n)}(\vartheta)$ der Entwicklung (7,3a) herrührende Beitrag dieses Mittelwertes sei mit $\bar{\vartheta}^{k(n)}$ bezeichnet; für diesen gilt nach (7,3b):

$$\bar{\vartheta}^{k(n)} = \frac{1}{B^n n!}\int_0^\infty y\,dy\,e^{-\frac{y^2}{4}}\left[\frac{y^2}{4}\log\frac{y^2}{4}\right]^n \cdot \int_0^\infty J_0(y\vartheta)\,\vartheta^{k+1}\,d\vartheta\,. \qquad (10,1)$$

Das Integral über J_0 hierin läßt sich mit Hilfe der Formel (C.3) des mathematischen Anhanges auswerten, womit weiter folgt:

$$\bar{\vartheta}^{k(n)} = \frac{1}{B^n n!} \cdot \int_0^\infty y\,dy\,e^{-\frac{y^2}{4}}\left[\frac{y^2}{4}\log\frac{y^2}{4}\right]^n \frac{\frac{k}{2}!}{2\left(-\frac{k}{2}-1\right)!}\left(\frac{2}{y}\right)^{k+2} \qquad (10,1')$$

[18] Die Zusatzglieder erster Ordnung vom Rutherford-Gesetz, d. h. die Glieder bis ϑ^{-6} in (9,3) bzw. bis φ^{-5} in (9,4) gelten auch, wenn nur Mehrfachstreuung vorliegt, da es für diese in Strenge nur auf das einzige in der Entwicklung (5,4) mitgeführte Glied auf der rechten Seite ankommt.

und mit $t = y^2/4$ als neuer Integrationsvariablen:

$$\bar{\vartheta}^{k(n)} = \frac{\frac{k}{2}!}{B^n n!\left(-\frac{k}{2}-1\right)!} \cdot \int_0^\infty dt\,e^{-t}\,t^{n-\frac{k}{2}-1}\log^n t\,. \qquad (10,1'')$$

Ganz entsprechend gilt für den Beitrag des Gliedes $\frac{1}{B^n} f^{(n)}(\varphi)$ in (8,4a) zum Mittelwert der k-ten Potenz des projizierten Winkels φ:

$$\bar{\varphi}^{k(n)} = \frac{2}{\pi B^n n!}\int_0^\infty dy\,e^{-\frac{y^2}{4}}\left[\frac{y^2}{4}\log\frac{y^2}{4}\right]^n \cdot \int_0^\infty \cos(y\varphi)\,\varphi^k\,d\varphi \qquad (10,2)$$

sowie weiter durch Anwendung der Gl. (C.5) des mathematischen Anhanges:

$$\bar{\varphi}^{k(n)} = \frac{2}{\pi B^n n!} \cdot \int_0^\infty dy\,e^{-\frac{y^2}{4}}\left[\frac{y^2}{4}\log\frac{y^2}{4}\right]^n \frac{\sqrt{\pi}\,\frac{k-1}{2}!}{2\left(-\frac{k}{2}-1\right)!}\left(\frac{2}{y}\right)^{k+1} \qquad (10,2')$$

und schließlich:

$$\bar{\varphi}^{k(n)} = \frac{\frac{k-1}{2}!}{\sqrt{\pi}\,B^n n!\left(-\frac{k}{2}-1\right)!} \cdot \int_0^\infty dt\,e^{-t}\,t^{n-\frac{k}{2}-1}\log^n t\,. \qquad (10,2'')$$

Das Integral der letzten Gl. (10,2″) ist identisch mit dem in (10,1″); daraus folgt, daß sich der Mittelwert $\bar{\varphi}^k$ von $\bar{\vartheta}^k$ nur um einen Faktor $\frac{k-1}{2}!\Big/\left(\sqrt{\pi}\,\frac{k}{2}!\right)$ unterscheidet, was sich natürlich auch ganz allgemein zeigen läßt. Das erwähnte Integral läßt sich ausdrücken als die n-te Ableitung nach p des

Eulerschen Integrals $\int_0^\infty dt\, e^{-t} t^p = p!$, genommen bei $p = n - \frac{k}{2} - 1$, und läßt sich daher auf die logarithmische Ableitung Ψ und deren Ableitungen zurückführen. Auf diese Weise erhält man[19]:

$$\frac{\vartheta^k}{\frac{k}{2}!} = \frac{V\pi\,\varphi^k}{\frac{k-1}{2}!} = \left\{1 + \binom{-\frac{k}{2}}{1}\frac{\Psi\left(-\frac{k}{2}\right)}{B} + \binom{1-\frac{k}{2}}{2}\frac{\Psi'^2\left(1-\frac{k}{2}\right)+\Psi'\left(1-\frac{k}{2}\right)}{B^2} + \dots\right\}. \tag{10,3}$$

Der gewöhnlich aus den experimentellen Daten bestimmte Mittelwert ist der des Winkels selbst; für diesen ergibt sich nach (10,3) mit $k = 1$[20]:

$$\frac{2}{\pi}\,\vartheta = \eta = \frac{1}{V\pi}\left\{1 + \frac{0{,}982}{B} - \frac{0{,}117}{B^2} + \dots\right\}. \tag{10,4}$$

Gerade dieser Mittelwert ist aber für den Vergleich zwischen Experiment und Theorie nicht sehr gut geeignet, da zu ihm der [in dem Anteil $f^{(1)}(\vartheta)$ bzw. $f^{(1)}(\varphi)$ enthaltene] „Einfachstreuungs-Schwanz" einen verhältnismäßig großen Beitrag liefert. Wegen der relativ geringen Häufigkeit der großen Streuwinkel sind die Schwankungen der experimentellen Statistik in diesem Bereich besonders groß, was eine relativ große experimentelle Unsicherheit des Mittelwertes $\bar{\vartheta}$ bzw. $\bar{\varphi}$ zur Folge hat. Günstiger in dieser Hinsicht liegen die Verhältnisse z. B. beim Mittelwert der Quadratwurzel des Winkels, für den man erhält:

$$\frac{\overline{\vartheta^1}}{0{,}906} = \frac{\overline{\varphi^1}}{0{,}691} = \left\{1 + \frac{0{,}271}{B} + \frac{0{,}349}{B^2} + \dots\right\}. \tag{10,5}$$

Wird der projizierte Winkel gemessen, so ist noch ein weiterer Umstand bei der Auswertung der Experimente zu beachten, auf den in der Literatur bereits hingewiesen wurde[23]. Unsere Winkelverteilungsfunktion $f(\varphi)$ (vgl. § 8) war abgeleitet worden unter der stillschweigenden Annahme, daß senkrecht zur Beobachtungsebene beliebig große Winkel Ψ vorkommen können. Nun werden (und wurden insbesondere in früheren Jahren) häufig flache Nebelkammern verwendet, in denen Bahnen, deren Querablenkung Ψ einen gewissen Grenzwinkel (von z. B. 10° bis 15°) überschreitet, nicht beobachtet werden können. Für den Grenzfall der „unendlich flachen Kammer" läßt sich dieser Umstand (wie dies auch von Goudsmit und Saunderson bereits geschehen ist) leicht theoretisch berücksichtigen, da für diesen Fall statt der Verteilungsfunktion $f(\varphi)$ diejenige des Gesamtwinkels $f(\vartheta)$ mit entsprechend geänderter Normierung zugrunde zu legen ist. Berücksichtigt man diese geänderte Normierung, so findet man, daß für den mittleren Winkel in der „unendlich flachen Kammer" $\bar{\varphi}_{(\mathrm{fl.K.})} = 1/\bar{\vartheta}^{-1}$ und für die mittlere Quadratwurzel des Winkels $\varphi^{1/2}_{(\mathrm{fl.K.})} = \overline{\vartheta^{1/2}}/\overline{\vartheta^{-1}}$ zu setzen ist. Damit ergibt sich numerisch nach (10,3) für

[19] Aus der angegebenen Berechnungsweise folgt für die Mittelwertausdrücke $\overline{\vartheta^{k}}^{(n)}$ der Gültigkeitsbereich $-2 < k < 2n$ und für die $\overline{\varphi^{k}}^{(n)}$ der Gültigkeitsbereich $-1 < k < 2n$. Die obere Grenze dieser Bereiche ist durch die Beschränkung $p > -1$ für die Gültigkeit des Eulerschen Intgrals für $p!$ gegeben, während die unteren Begrenzungen aus den entsprechenden Gültigkeitsbereichen der Formeln (C, 3) bzw. (C, 5) des mathematischen Anhangs folgen. Außer für $n = 0$ sind dies auch tatsächlich diejenigen Bereiche, in denen die betreffenden Mittelwerte konvergieren. Für $n = 0$ rückt die obere Grenze für k bis $+\infty$ hinaus, wie die für diesen Fall mögliche direkte Berechnung $\overline{\vartheta^{k}}^{(0)} = 2\int_0^\infty e^{-\vartheta^2}\,\vartheta^{k+1}\,d\vartheta = (k/2)!$ und entspr. für $\overline{\varphi^{k}}^{(0)}$ zeigt. Der Gültigkeitsbereich der vollständigen Formel (10,3) ist somit durch das zu $n = 1$ gehörige Entwicklungsglied bestimmt. Der quadratische Mittelwert divergiert wegen des in $f^{(1)}(\vartheta)$ bzw. $f^{(1)}(\varphi)$ enthaltenen „Einfachstreuungs-Schwanzes" (genauer: zu $\overline{\vartheta^2}$ tragen wesentlich große Winkel bei, so daß die benutzte Näherungsform des Rutherford-Gesetzes unbrauchbar wird). Es sei hier betont, daß die wesentlich vom quadratischen Mittelwert Gebrauch machenden „Diffusions"-Theorien der Vielfachstreuung auf der Vernachlässigung der Einfachstreuung beruhen, was in unserem Falle auf die Ersetzung der vollständigen Verteilungsfunktionen durch die Gauß-Funktionen erster Näherung hinauslaufen würde.

[20] Die entsprechende Mittelwertformel von Williams in ihrer 1941 verbesserten Gestalt erhält man, indem man $(\bar{\varphi})^2$ nach (10,4) als lineare Funktion in $\log \Omega^b$ annähert. Das gleiche gilt für die von Goudsmit u. Saunderson angegebene Interpolationsformel.

die Mittelwerte der flachen Kammer:

$$\bar{q}_{(\mathrm{fl.K.})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \frac{0{,}0182}{B} - \frac{0{,}369}{B^2} + \dots \right\} \tag{10,4'}$$

und

$$\bar{q}^{\,2}_{(\mathrm{fl.K.})} = 0{,}691 \left\{ 1 + \frac{0{,}0387}{B} + \frac{0{,}515}{B^2} + \dots \right\}. \tag{10,5'}$$

Die Benutzung des Mittelwertes der Quadratwurzel des Winkels ist, wie der Vergleich von (10,5') mit (10,5) zeigt, auch insofern günstig, als für diesen der Unterschied zwischen dem Fall der hohen und dem der flachen Kammer verhältnismäßig gering ist.

§ 11. Gültigkeitsbereich der Theorie der Vielfachstreuung

Bei der Entwicklung nach Potenzen von $1/B$ (§§ 7 u. 8) haben wir die höheren als quadratischen Glieder nicht mehr mitberücksichtigt, wodurch also ein Fehler von der Ordnung $1/B^3$ bedingt ist. Wegen $B \sim 10$ reicht die darin bestehende Genauigkeit praktisch aus. Im Vergleich mit diesem Fehler ist derjenige, der in der Vernachlässigung des zweiten und der höheren Glieder von (5,3) besteht (worauf unsere ganze Vielfachstreuungstheorie beruht) im allgemeinen sehr viel kleiner, nämlich, wie man leicht zeigen kann, von der Ordnung $1/\Omega_b B \approx e^{-B}$ [(letzteres wegen (7.1)]. Es erscheint nun vernünftig, als Gültigkeitsgrenze der Vielfachstreuungstheorie denjenigen Wert von B zu nehmen, für den die beiden genannten Fehler etwa einander gleich werden, da es ja keinen Sinn hätte, die Entwicklung nach Potenzen von $1/B$ weiter zu treiben, als der Genauigkeit der ganzen Theorie entspricht. Aus $e^B \approx B^3$ ergibt sich somit

$$B \approx 4{,}5, \quad \Omega_b \approx 20$$

als untere Grenze für die Gültigkeit der Theorie der Vielfachstreuung: die Genauigkeit ist hier noch $\sim 1\%$.

§ 12. Vergleich mit Experimenten über Vielfachstreuung

In Abb. 3 sind die Ergebnisse teils älterer und teils neuerer Experimente mit der Vielfachstreuungstheorie verglichen[21, 22, 23, 24]. Die bei den verschiedenen Experimenten zur Charakterisierung der Streubreite gemessenen Winkelgrößen, d. h. der mittlere Winkel, der Wendepunktswinkel usw. wurden, um vergleichbar zu sein, auf eine einheitliche Größe, nämlich auf das durch χ_c^2 dividierte mittlere Winkelquadrat der best-angepaßten Gauß-Funktion reduziert. Diese Größe sollte mit der theoretischen Größe B (ausgezogene Kurve in Abb. 3) übereinstimmen. Als Abszisse wurde als ein einheitliches Maß der Schichtdicke die (aus den experimentellen Daten entnommene) Größe Ω_b aufgetragen. — Die genannte Reduktion geschah z. B. im Fall des mittleren Winkels mit Hilfe von

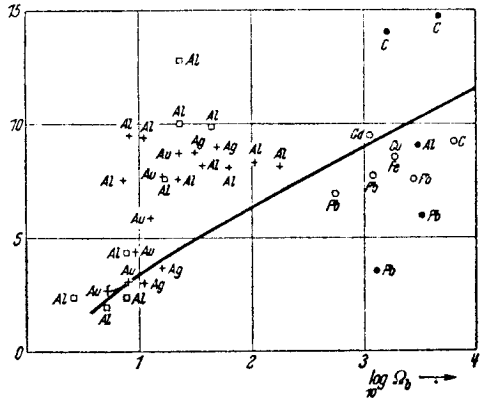

Abb. 3. Vergleich experimenteller Ergebnisse mit der Vielfachstreuungs-Theorie. • = Sheppard u. Fowler. ○ = Oleson, Chao u. Crane. + = Crother u. Schonland. □ = Geiger u. Bothe.

Gl. (10,4) (sowie analoger Formeln in den übrigen Fällen) mit Benutzung des aus den experimentellen Daten folgenden χ_c^2.

Wie man sieht, zeigt Abb. 3 die gleiche starke Streuung der experimentellen Werte, wie sie beim Vergleich mit den älteren Theorien gefunden wurde. Inwieweit diese Diskrepanzen durch die beim Vergleich noch nicht berücksichtigten Einflüsse des Energieverlustes und der Gitterstruktur bedingt sein können, beabsichtigen wir im folgenden Tl. III dieser Arbeit noch nachträglich zu untersuchen. — Bei den älteren Messungen[21, 22] ist übrigens eine genaue Übereinstimmung mit der Theorie nicht zu erwarten, da sie mehr vorläufig orientierenden Charakter tragen und z. Tl. auch außerhalb der Grenze der Gültigkeit der Vielfachstreuungstheorie fallen.

[21] J. A. Crother u. Schonland, Proc. Roy. Soc. [London] **100**, 526 [1922].
[22] H. Geiger u. W. Bothe, Z. Physik **6**, 204 [1921].
[23] N. L. Oleson, K. T. Chao u. H. R. Crane, Physic. Rev. **60**, 378 [1941].
[24] C. W. Sheppard u. W. A. Fowler, Physic. Rev. **57**, 273 [1940].

Mathematischer Anhang

A. Am einfachsten beweist man die (4,1) entsprechende allgemeinere Beziehung für gewöhnliche Fourier-Integrale (auch nicht-zylindersymmetrischer Funktionen) der Form

$$u_1(\vec{x}) = \int\int \frac{d\sigma_y}{2\pi} r_1(\vec{y})\, e^{i(\vec{x},\vec{y})}. \qquad (A,1)$$

Für diese gilt:

$$\int\int \frac{d\sigma_{x'}}{2\pi} u_1(\vec{x}-\vec{x}')\, u_2(\vec{x}') = \int\int \frac{d\sigma_y}{2\pi} \int\int \frac{d\sigma_{y'}}{2\pi} \int\int \frac{d\sigma_{y'}}{2\pi} r_1(\vec{y})\, r_2(\vec{y}')\, e^{i|(\vec{x},\vec{y})-(\vec{x}',\vec{y}-\vec{y}')|}, \qquad (A,2)$$

woraus wegen der „Orthogonalitätsbeziehung":

$$\int\int \frac{d\sigma_{x'}}{2\pi} e^{-i(\vec{x}',\vec{y}-\vec{y}')} = \delta_2(\vec{y}-\vec{y}') \qquad (A,3)$$

[vgl. die Definition der bereits in (3,1a) eingeführten zweidimensionalen Diracschen δ-Funktion] folgt:

$$\int\int \frac{d\sigma_{x'}}{2\pi} u_1(\vec{x}-\vec{x}')\, u_2(\vec{x}') = \int\int \frac{d\sigma_y}{2\pi} r_1(\vec{y})\, r_2(\vec{y})\, e^{i(\vec{x},\vec{y})}. \qquad (A,4)$$

(A,4) hat bereits die Gestalt der Gl. (4,1) und ist allgemeiner als diese. Speziell für zylindersymmetrische Funktionen u bzw. v, die nur von den Beträgen x, y abhängen, gehen bei Einführung ebener Polarkoordinaten y, α in der $\vec{y}$-Ebene (mit $d\sigma_y = y\,dy\,d\alpha$ und $(\vec{x},\vec{y}) = xy\cos\alpha$) und Ausführung der Integration über α die allgemeinen Fourier-Integrale (A,1) und (A,4) in J_0-Integrale über, womit (4,1) bewiesen ist.

B. Für das folgende gehen wir aus von dem Integral über die zweidimensionale Gauß-Funktion in der $\vec{y}$-Ebene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{d\sigma_y}{2\pi} e^{-\frac{\alpha}{4}(\vec{y}-\vec{y}_0)^2} = \frac{2}{\alpha}. \qquad (B,1)$$

Die Vektorkonstante $\vec{y}_0$ darf dabei auch komplex und z. B. $= \frac{2i}{\alpha}\vec{x}$ ($\vec{x}$ ein reeller zweidimensionaler Vektor) gesetzt werden, womit folgt:

$$\int\int \frac{d\sigma_y}{2\pi} e^{-\frac{\alpha y^2}{4}+i(\vec{x},\vec{y})} = \int_0^\infty y\,dy\,J_0(xy)\, e^{-\frac{\alpha y^2}{4}} = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}. \qquad (B,2)$$

Die zweite Gl. (B,2) werden wir im folgenden noch mehrfach benutzen, um eine Reihe weiterer Transformationsformeln abzuleiten, und zwar zunächst die Gl. I (A,2): Dazu multiplizieren wir die zweite Gl. (B,2) links und rechts mit $e^{-\alpha/4}\alpha^p\,d\alpha$ und integrieren (bei Beschränkung auf $p > -1$) über α von Null bis $+\infty$. Auf der linken Seite führt diese Integration auf $p!$; das Integral auf der rechten Seite werde durch Einführung der neuen Integrationsvariablen ψ gemäß $\alpha = 2x\,e^{\psi}$ umgeformt, womit folgt:

$$\int_0^\infty \frac{y\,dy\,J_0(xy)}{(1+y^2)^{p+1}} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{p!}\int_0^\infty d\psi\, \mathfrak{Cof}\, p\,\psi\, e^{-x\,\mathfrak{Cof}\,\psi} = L_p(x). \qquad (B,3)$$

($p!$ bedeutet die Gammafunktion.) Damit sind die Transformationsformeln I, Anhang (A,2) und (A,3') bewiesen.

C. Die (zweite) Gl. (B,2) werde jetzt rechts und links multipliziert mit $\alpha^{-p-1}\,d\alpha$. Die anschließende Integration über α darf in diesem Falle nicht einfach (wie unter B) längs der reellen α-Achse genommen werden, da dies auf divergierende Integrale führen würde. Wir wählen daher den Integrationsweg in der komplexen α-Ebene, der von $+\infty$ bis $+\infty$ unter Umgehung des Nullpunktes im positiven Sinne führt, und den wir symbolisch mit C bezeichnen:

$$\int_0^\infty y\,dy\,J_0(xy)\int_C \frac{d\alpha}{\alpha^{p+1}} e^{-\frac{\alpha y^2}{4}} = 2\int_C \frac{d\alpha}{\alpha^{p+2}} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}. \qquad (C,1)$$

Für das Schleifen-Integral über α auf der linken Seite von (C,1) gilt bekanntlich für *alle* p:

$$\int_C \frac{d\alpha}{\alpha^{p+1}} e^{-\frac{\alpha y^2}{4}} = \frac{2\pi i}{p!}\left(\frac{y^2}{4}\right)^p e^{-i\pi p}. \qquad (C,2)$$

Das Integral auf der rechten Seite von (C,1) zerfällt in die Differenz zweier längs der positiv-reellen Achse genommenen Integrale auf benachbarten Blättern und wird daher $= 2\left[e^{-2\pi i p}-1\right] p!\, x^{-2p-2}$. (Gültig für $p > -1$.) Damit ergibt (C,1):

$$\int_0^\infty y\,dy\,J_0(xy)\left(\frac{y^2}{4}\right)^p = -\frac{2}{\pi}\sin\pi p\, p!^2\, x^{-2p-2} = \frac{2\,p!}{(-p-1)!}\, x^{-2p-2}. \qquad (C,3)$$

Differenziert man dies ein- bzw. zweimal nach p, so folgen die weiteren Formeln:

$$\int_0^\infty y\,dy\,J_0(x\,y)\left(\frac{y^2}{4}\right)^p \log\frac{y^2}{4} = \frac{2\,p!\,x^{-2p-2}}{(-p-1)!}\,[-2\log x + \Psi(p) + \Psi(-p-1)] \tag{C, 3'}$$

sowie:

$$\int_0^\infty y\,dy\,J_0(x\,y)\left(\frac{y^2}{4}\right)^p \log^2\frac{y^2}{4} = \frac{2\,p!\,x^{-2p-2}}{(-p-1)!}\,\{[-2\log x + \Psi(p) + \Psi(-p-1)]^2 + \Psi'(p) - \Psi'(-p-1)\}. \tag{C, 3''}$$

Geht man an Stelle von (B,2) von der Fourier-Darstellung der eindimensionalen Gauß-Funktion:

$$\int_0^\infty dy\cos(x\,y)\,e^{-\frac{a\,y^2}{4}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{x^2}{a}} \tag{C; 4}$$

aus, so erhält man entsprechend (C,3) in ganz analoger Weise für $p > -1/2$:

$$\int_0^\infty dy\cos(x\,y)\left(\frac{y^2}{4}\right)^p = \frac{\sqrt{\pi}\,(p-1/2)!}{(-p-1)!}\,x^{-2p-1}, \tag{C, 5}$$

woraus wiederum weitere Formeln durch Differenzieren nach p zu erhalten sind.

D. Nach (7,3b) ist:

$$f^{(n)}(\vartheta) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty y\,dy\,J_0(y\,\vartheta)\,e^{-\frac{y^2}{4}}\left(\frac{y^2}{4}\log\frac{y^2}{4}\right)^n. \tag{D, 1}$$

Diese Formel soll jetzt ausgewertet werden. Dazu gehen wir von der zweiten Gl. (B,2) mit $1+\eta$ an Stelle von α aus, multiplizieren diese mit $\eta^{-p-1}\,d\eta$ und integrieren über η längs des komplexen Integrationsweges C. Mit Benutzung von (C,2) folgt dann ähnlich wie im Abschnitt C:

$$\int_0^\infty y\,dy\,J_0(y\,\vartheta)\,e^{-\frac{y^2}{4}}\left(\frac{y^2}{4}\right)^p = \frac{p!\,e^{i\pi p}}{2\pi i}\,2\int_C \frac{d\eta}{\eta^{p+1}}\,\frac{e^{-\frac{\vartheta^2}{1+\eta}}}{1+\eta}. \tag{D, 2}$$

Für das folgende ist es bequem, hierin $p!$ durch das Eulersche Integral auszudrücken, womit die rechte Seite von (D,2) lautet:

$$= \int_0^\infty d\xi\,e^{-\xi}\,\frac{1}{i\pi}\int_C \frac{d\eta}{\eta}\left(\frac{\xi\,e^{i\pi}}{\eta}\right)^p \frac{e^{-\frac{\vartheta^2}{1+\eta}}}{1+\eta}. \tag{D, 2'}$$

Differenziert man dies n-mal nach p und setzt anschließend $p = n$, so folgt für $f^{(n)}(\vartheta)$ nach (D,1):

$$f^{(n)}(\vartheta) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty d\xi\,e^{-\xi}\,\xi^n\,\frac{1}{i\pi}\int_C \frac{d\eta}{\eta^{n+1}}\left[\log\frac{\eta}{\xi} - i\pi\right]^n \frac{e^{-\frac{\vartheta^2}{1+\eta}}}{1+\eta}. \tag{D, 3}$$

Im folgenden werden wir der Übersichtlichkeit halber den Integraloperator $\frac{1}{n!}\int_0^\infty d\xi\,e^{-\xi}\,\xi^n$ nicht mit hinschreiben; die Integration über ξ kann bei den Endformeln bequem nachgeholt werden. — Mit dieser Verabredung lautet (D,3) speziell für $n = 1$:

$$f^{(1)}(\vartheta) = \frac{1}{i\pi}\int_C \frac{d\eta}{\eta^2}\left[\log\frac{\eta}{\xi} - i\pi\right]\frac{e^{-\frac{\vartheta^2}{1+\eta}}}{1+\eta}. \tag{D, 4}$$

Unser Ziel ist nun, das Schleifenintegral in (D,4) in ein Integral längs der reellen Achse zu verwandeln. Dazu müssen wir die bei $\eta = 0$ divergierenden Terme vom Integranden subtrahieren und gesondert behandeln. Der erste, am stärksten divergierende Term kann ohne weiteres abgezogen werden, da sein Beitrag zum Integral an den Grenzen $+\infty$ wie η^{-1} verschwindet. Nachdem dies geschehen ist, geht man zweckmäßig zu der neuen Integrationsvariablen t gemäß $1 - t = \frac{1}{1+\eta}$ über, womit $f^{(1)}(\vartheta)$ lautet:

$$f^{(1)}(\vartheta) = \frac{e^{-\vartheta^2}}{i\pi}\oint_1^{1\cdot e^{2\pi i}} \frac{dt}{t^2}\left[\log\frac{t}{(1-t)\,\xi} - i\pi\right]\cdot\{(1-t)\,e^{t\vartheta^2} - 1\}. \tag{D, 4'}$$

(Der Integrationsweg verläuft hierbei, ausgehend von $t = +1$ zunächst längs der reellen Achse auf den Punkt $t = 0$ zu, umkreist diesen im positiven Sinne und kehrt schließlich längs der reellen Achse zu $t = +1$ zurück.) Der Integrand von (D,4') enthält noch einen vom ersten Entwicklungsgliede der geschweiften Klammer stammenden logarithmisch divergierenden Term, dessen Beitrag zu $f^{(1)}(\vartheta)$ wir gesondert betrachten; dieser lautet:

$$\frac{e^{-\vartheta^2}}{i\pi}(\vartheta^2 - 1)\oint_1^{1\cdot e^{2\pi i}} \frac{dt}{t}\left[\log\frac{t}{(1-t)\,\xi} - i\pi\right]. \tag{D, 5}$$

Hierin ist der zu $\log(1-t)$ gehörige Teil des Integranden bei $t=0$ regulär und liefert daher keinen Beitrag zum Integral. Der zu $\log t$ gehörige Teil des Integranden liefert den gleichfalls verschwindenden Beitrag $\frac{1}{2}[(+i\pi)^2-(-i\pi)^2]$: es bleibt somit für den Anteil (D,5) von $f^{(1)}(\vartheta)$:

$$-2\,e^{-\vartheta^2}(\vartheta^2-1)\log\xi \qquad \text{(D,5')}$$

oder nach Ausführung der Integration über ξ:

$$-2\,e^{-\vartheta^2}(\vartheta^2-1)\,\Psi(1)\,. \qquad \text{(D,5'')}$$

Fügt man noch den nach Abzug des linearen Gliedes der geschweiften Klammer in (D,4') verbleibenden Rest hinzu, so folgt schließlich insgesamt:

$$f^{(1)}(\vartheta)=2\,e^{-\vartheta^2}\Big\{-(\vartheta^2-1)\,\Psi(1) + \int_0^1 \frac{dt}{t^2}\,[(1-t)\,e^{t\vartheta^2}-1-t(\vartheta^2-1)]\Big\}, \qquad \text{(D,4'')}$$

was durch partielle Integration in die in (7,3c) angegebene Form gebracht werden kann.

Für $n=2$ kann man in (D,3) die ersten beiden Entwicklungsglieder von $\frac{e^{-\vartheta^2(1+\eta)}}{1+\eta}$ im Integranden sofort abziehen, da diese keinen Beitrag zum Integral liefern. Mit der neuen Integrationsvariablen t folgt dann ähnlich wie (D,4') (unter Fortlassung der Integration über ξ):

$$f^{(2)}(\vartheta)=\frac{e^{-\vartheta^2}}{i\pi}\oint_1^{1\cdot e^{2\pi i}}\frac{dt}{t^3}\left[\log\frac{t}{(1-t)\,\xi}-i\pi\right]^2 \cdot\{(1-t)^2e^t-1-(\vartheta^2-2)\,t\}. \qquad \text{(D,6)}$$

Der von dem in t quadratischen ersten Entwicklungsglied der geschweiften Klammer in (D,6) stammende logarithmisch divergierende Term des Integranden von (D,6) liefert als Beitrag zu $f^{(2)}(\vartheta)$:

$$\frac{e^{-\vartheta^2}}{i\pi}\left(\frac{\vartheta^4}{2}-2\,\vartheta^2+1\right)\cdot\oint_1^{1\cdot e^{2\pi i}}\frac{dt}{t}\left[\log\frac{t}{(1-t)\,\xi}-i\pi\right]^2. \qquad \text{(D,7)}$$

Zur Auswertung desselben zerlegen wir den Integrationsweg gemäß:

$$\oint_1^{1\cdot e^{2\pi i}}=\oint_\varepsilon^{\varepsilon\cdot e^{2\pi i}}+\left[\int_{\varepsilon\cdot e^{2\pi i}}^{1\cdot e^{2\pi i}}-\int_\varepsilon^1\right].$$

Das erste, auf einem kleinen Kreise um $t=0$ mit dem Radius ε genommene Teilintegral ergibt [da $\log(1-t)$ dort wie ε verschwindet, bis auf $0(\varepsilon)$]:

$$\oint_\varepsilon^{\varepsilon\cdot e^{2\pi i}}=\frac{1}{3}\left\{\left[\log\frac{\varepsilon}{\xi}+i\pi\right]^3-\left[\log\frac{\varepsilon}{\xi}-i\pi\right]^3\right\} =2\pi i\left[\log^2\frac{\varepsilon}{\xi}-\frac{\pi^2}{3}\right]. \qquad \text{(D,8a)}$$

Das zweite längs der reellen Achse zwischen ε und 1 genommene Teilintegral wird:

$$\int_{\varepsilon\cdot e^{2\pi i}}^{1\cdot e^{2\pi i}}-\int_\varepsilon^1=4\pi i\int_\varepsilon^1\frac{dt}{t}\log\frac{t}{(1-t)\,\xi} =2\pi i\left[\log^2\frac{1}{\xi}-\log^2\frac{\varepsilon}{\xi}+\frac{\pi^2}{3}\right] \qquad \text{(D,8b)}$$

$\left(\text{bis auf } 0(\varepsilon) \text{ mit Benutzung von } \int_0^1\frac{dt}{t}\log(1-t)=-\frac{\pi^2}{6}\right)$. Damit folgt insgesamt für den Beitrag (D,7):

$$2\,e^{-\vartheta^2}\left(\frac{\vartheta^4}{2}-2\,\vartheta^2+1\right)\log^2\xi\,. \qquad \text{(D,7')}$$

Fügt man hierzu noch den restlichen, nach Abzug des quadratischen Gliedes der geschweiften Klammer in (D,6) verbleibenden Anteil von $f^{(2)}(\vartheta)$ und berücksichtigt, daß bei der Integration über ξ: $\log\xi\to\Psi(2)$ und $\log^2\xi\to[\Psi^2(2)+\Psi'(2)]$ übergeht, so folgt schließlich:

$$\begin{aligned}f^{(2)}(\vartheta)&=2\,e^{-\vartheta^2}\Big\{\left(\frac{\vartheta^4}{2}-2\,\vartheta^2+1\right)[\Psi^2(2)+\Psi'(2)]\\&\quad+2\int_0^1\frac{dt}{t^3}\left[\log\frac{t}{(1-t)}-\Psi(2)\right]\left[(1-t)^2e^{t\vartheta^2}-1-(\vartheta^2-2)\,t-\left(\frac{\vartheta^4}{2}-2\,\vartheta^2+1\right)t^2\right]\Big\}.\end{aligned} \qquad \text{(D,9)}$$

In ganz entsprechender Weise, wie wir es für den Gesamtwinkel ϑ soeben durchgeführt haben, sind auch die durch (8,4b) gegebenen Integralausdrücke

$$f^{(n)}(q)=\frac{2}{\pi\,n!}\int_0^\infty dy\cos(y\,q)\,e^{-\frac{y^2}{4}}\left(\frac{y^2}{4}\log\frac{y^2}{4}\right)^n \qquad \text{(D,10)}$$

für den projizierten Winkel φ auszuwerten, wobei man nur statt von (B,2) von dem Fourier-Integral der eindimensionalen Gauß-Funktion (C,4) auszugehen hat. Analog zu (D,3) erhält man auf diese Weise:

$$f^{(n)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, n!} \int_0^\infty d\xi\, e^{-\xi} \xi^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\eta}{\eta^{n+1}} \left[\log \frac{\eta}{\xi} - i\pi\right]^n \frac{e^{-\frac{\varphi^2}{1+\eta}}}{1+\eta}. \tag{D, 11}$$

Speziell für $n = 1$ ergibt dies weiter:

$$f^{(1)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} \left\{ -\left(\varphi^2 - \frac{1}{2}\right) \Psi(1) + \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\sqrt{1-t}\, e^{t\varphi^2} - 1 - \left(\varphi^2 - \frac{1}{2}\right) t\right]\right\}, \tag{D, 12}$$

was durch partielle Integration noch umgeformt werden kann in

$$f^{(1)}(\varphi) = \Phi'(\varphi) \left\{ \left(\varphi^2 - \frac{1}{2}\right) \left[\log 4\gamma + \int_0^1 \frac{dz}{1-z^2} \left(e^{(1-z^2)\varphi^2} - 1\right)\right] + 1 \right\} - 2\varphi\, \Phi(\varphi). \tag{D, 12'}$$

(Dabei bedeutet $\Phi(\varphi)$ das Fehlerintegral und $\Phi'(\varphi)$ dessen Ableitung.) Die Auswertung von (D,11) für $n = 2$ ergibt schließlich:

$$f^{(2)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\varphi^2} \left\{ \left(\frac{\varphi^4}{2} - \frac{3\varphi^2}{2} + \frac{3}{8}\right) \left[\Psi^2(2) + \Psi'(2)\right] \right. \tag{D, 13}$$

$$\left. + 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^3} \left[\log \frac{t}{1-t} - \Psi(2)\right] \left[(1-t)^{3/2} e^{t\varphi^2} - 1 - \left(\varphi^2 - \frac{3}{2}\right) t - \left(\frac{\varphi^4}{2} - \frac{3\varphi^2}{2} + \frac{3}{8}\right) t^2\right] \right\}.$$

Damit sind die $f^{(n)}(\vartheta)$ und $f^{(n)}(\varphi)$ für $n = 1$ und 2 auf bequeme, für die numerische Berechnung geeignete Integrale zurückgeführt.

Hrn. Prof. Heisenberg bin ich für sein großes Interesse und sehr wertvolle Ratschläge beim Entstehen dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

Zur Breit-Wigner-Formel II

Von Siegfried Flügge*

(Z. Naturforschg. 3a, 97—104 [1948]; eingegangen am 8. Dezember 1947)

In Fortsetzung einer früheren Arbeit wird die Breit-Wigner-Formel auf den Fall mehrerer Resonanzniveaus erweitert und gezeigt, daß dabei charakteristische Interferenzerscheinungen zwischen den einzelnen Niveaus auftreten, die der experimentellen Erfassung zugänglich sind. Insbesondere wird der Fall eines engen Dubletts diskutiert und gezeigt, daß hierbei durch Interferenzerscheinungen eine sehr schmale und hohe Linie an Stelle zweier normaler zustande kommen kann.

Vor einiger Zeit[1] habe ich versucht, eine Herleitung der Formel für den Wirkungsquerschnitt beim Resonanzeinfang langsamer Neutronen an Atomkernen zu geben, die den quantenmechanischen Gepflogenheiten mehr entspricht als die auf das spezielle Problem zugeschnittenen Ableitungen, die sich sonst in der Literatur finden[2]. In der folgenden Mitteilung wird dieser Gedankengang auf den Fall *mehrerer* Resonanzniveaus ausgedehnt. Das physikalische Problem, das dabei im Mittelpunkt steht, ist folgendes: Wird der Einfangquerschnitt nach der „Ein-Niveau-Formel" berechnet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{E_r}{E}} \frac{\sigma_r \Gamma^2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2}, \tag{1}$$

so erhält man für thermische Energie $E_{th} \ll E_r$ genähert

$$\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E_r}{E_{th}}} \left(\frac{\Gamma}{E_r}\right)^2 \sigma_r, \tag{1a}$$

* (16) Marburg, Wilhelm-Roser-Str. 33a.

[1] S. Flügge, Z. Naturforschg. **1**, 121 [1946]. Im folgenden als I bezeichnet.

[2] Vgl. die Zitate in I.